

## 粒子特性

### 1. 粒子径

粒子の大きさを**粒度**(particle size)という。粒度の基準として、たとえば長さや体積などが考えられる。とくに前者を用いる場合は、**粒子径**または**粒径**(particle diameter)と呼ばれる。粒子径に関わらず、たんに「径」と言えば、それは直径を指す。粒子径は、粒子形状が球の場合に限り、一義的に決まる。立方体の場合は、対角線の長さが一辺の長さとは異なる。いびつな単一粒子の粒子径には、何らかの基準に基づいて定義された**代表粒子径**(characteristic particle diameter)を用いる。主な代表粒子径には、単一粒子の幾何学的形状に基づく**三軸径**(diameter of the three dimensions)、**相当径**(equivalent diameter)、**定方向径**(unidirectional particle diameter)に加えて、粒子群の取り扱いにはなるが、実用的な**ふるい目開き径**、**ストークス径**(Stokes diameter)がある。

三軸径は、いびつな粒子を外接直方体に置き換える。置換した直方体の**短径**、**長径**、**厚み**の各寸法が代表粒子径となる。相当径は、いびつな粒子をそれと同じ体積  $V_p$ 、表面積  $S_p$ 、終末沈降速度  $u_t$  を持つ球に置換する。置換した球の寸法が代表粒子径であり、それぞれ**等体積球相当径**(equivalent volume diameter)  $x_v$ 、**等表面積球相当径**(equivalent surface diameter)  $x_s$ 、**ストークス径**(Stokes diameter)  $x_{st}$  という。そのほか、いびつな粒子と同じ投影面積を持つ円に置き換え、その直径  $x_H$  を代表粒子径とする**ヘイウッド径**(Heywood diameter)がある。

等体積球相当径は、次式のようにして導かれる。

$$V_p = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{x_v}{2} \right)^3 \quad \cdots(1.1)$$

$$x_v = \sqrt[3]{\frac{6V_p}{\pi}} \quad \cdots(1.2)$$

同様に、等表面積球相当径は次式となる。

$$x_s = \sqrt{\frac{S_p}{\pi}} \quad \cdots(1.3)$$

ストークス径は、自由沈降粒子の運動方程式を解いて、次式で与えられる。

$$x_{st} = \sqrt{\frac{18\mu u_t}{g(\rho_p - \rho_f)}} \quad \cdots(1.4)$$

定方向径は、粒子投影像を顕微鏡観察することで解析する。**フェレー径**(Ferret diameter)  $x_F$  は、投影した粒子を定方向の二本の平行線で挟み、その垂線の長さで定義される。**マーチン径**(Martin diameter)  $x_M$  は、粒子の投影面積を二等分する線分の長さで定義される。**クルムバイン径**(Krummbein diameter)  $x_K$  は、投影した粒子像の最大長さで定義される。これらの代表径は、すべて同一方向の寸法で定義される。

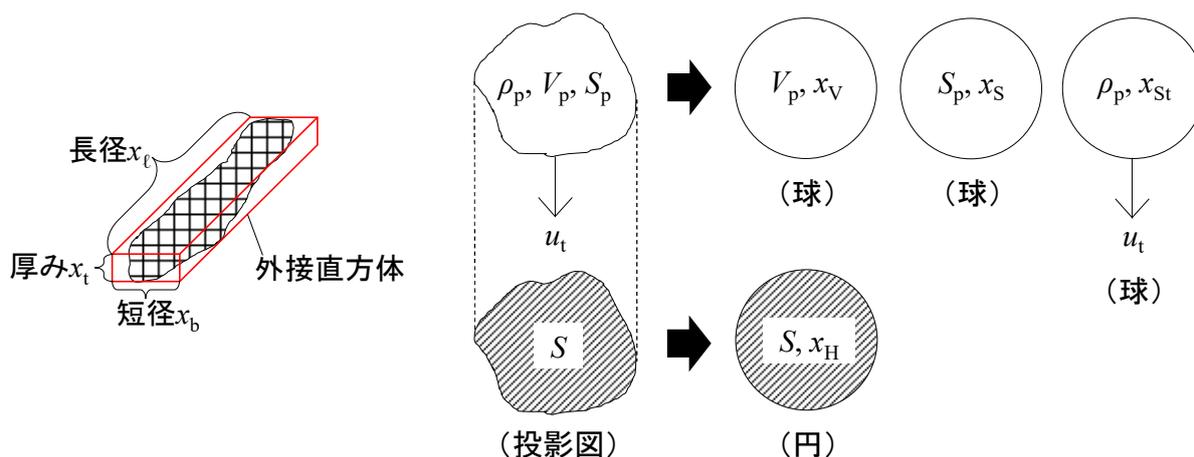


図 1.1 三軸径(左)と相当径(右)の定義

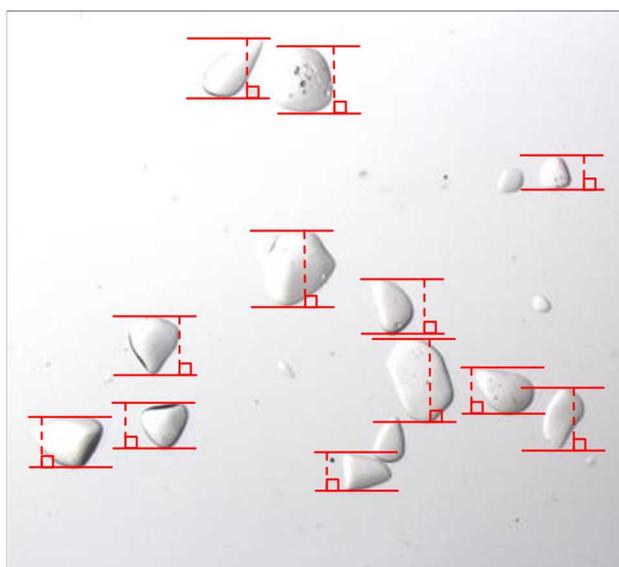


図 1.2 フェレー径の採寸例



図 1.3 マーチン径の採寸例

(フェレー径の平行線の向きやマーチン径の採寸の向きは任意だが、すべて同じ向きに統一する。マーチン径は、境界の両側で投影面積が同じになるように定める。クルムバイン径は、同じ向きに統一した上で、最大寸法の箇所を採寸する。)

表 1.1 主な代表粒子径 [文献 1]

分類	名称	記号	定義
三軸径	長径	$x_l$	外接直方体の長軸寸法
	短径	$x_b$	外接直方体の短軸寸法
	厚み	$x_t$	外接直方体の厚み
相当径	等体積球相当径	$x_V$	いびつな粒子と等しい体積をもつ球の直径
	等表面積球相当径	$x_S$	いびつな粒子と等しい表面積をもつ球の直径
	ヘイウッド径	$x_H$	いびつな粒子と等しい投影面積をもつ円の直径
	ストークス径**	$x_{St}$	いびつな粒子と等しい沈降速度をもつ球の直径
定方向径	フェレー径	$x_F$	投影粒子を定方向の二本の平行線で挟んでできる垂線の長さ
	マーチン径	$x_M$	粒子の投影面積を二等分する定方向の線分の長さ
	クルムバイン径	$x_K$	投影した粒子像の定方向の最大長さ(定方向最大径ともいう。)

有効径*	ふるい目開き径	$x_{sv}$	ふるいの目開きで定義される寸法
	(ストークス径)**	( $x_{St}$ )	いびつな粒子と等しい沈降速度をもつ球の直径

\*粒子群に対する定義であるが、実用的(測定が便利)であるため、単一粒子径の分類表と一緒に記載している成書が多い。  
 \*\*粒子群に対する定義であることから、相当径の代わりに有効径として分類している成書もある。

## 2. 粒子径分布

### 2. 1 分布曲線

分布とは「バラツキ」のことである。身長、体重、年齢別人口など。粒子群における粒子径のバラツキを**粒子径分布**(particle size distribution)という。**粒子径分布**を解析することで、粒子のバラツキの度合いや粒子径の平均値を図上で明らかにすることができる。粒子径分布の基本は、**偏差**(deviation)と**平均**(mean)であり、これらの統計量をもとに分布曲線の形状が表現される。分布曲線を描く以前に、粒子径の測定と粒子径分布の解析を行う必要がある。具体的には、粗大粒子であればふるい、微小粒子であれば顕微鏡観察や沈降実験により、代表粒子径を複数測定する。得られた粒子径データをもとに粒子径範囲を適当に区切り、それぞれの範囲に含まれる粒子量の割合を個数基準または重量基準で求める。ふるいや沈降実験であれば粒子重量が測定データとなるので重量基準になるし、顕微鏡観察であれば画像データをもとに粒子数を計数するので個数基準になる。いずれも互換性があり、基準を変更することができる。

ふるいによる粒子径分布の解析例を以下の図表に示す。代表粒子径ごとの粒子量割合の扱いによって粒子径分布の種類が異なる。**積算ふるい上分布**(cumulative oversize distribution) $1-Q$ または $R[\%]$ は、ある基準粒子径以上の累積の粒子量割合を表す。たとえば、下表の  $850\ \mu\text{m}$  を基準粒子径に取った場合は、 $850\sim 3360\ \mu\text{m}$  のふるい目開きの質量基準粒子量割合を合算すればよいので、 $1-Q=0.00+1.20+2.90+18.8+28.8=51.7\%$ となる。**積算ふるい下分布**(cumulative undersize distribution) $Q$ または $U[\%]$ は、ある基準粒子径以下の累積の粒子量割合を表し、 $100\%$ からふるい上分布を差し引くことで求められる。**頻度分布**(frequency distribution) $q$ または $f[\%/\mu\text{m}]$ は、ある粒子径幅あたりの粒子量割合を表す。この粒子量割合は、ふるい目開きごとの積算ふるい下またはふるい上分布の差で表される。たとえば、下表の  $1700\sim 2360\ \mu\text{m}$  に含まれる粒子量割合は、 $1700\ \mu\text{m}$  のふるいに乗っている粒子群に対する割合に相当し、 $2.90\%$ となる。それを粒子径幅あたりに直せばよいので、 $q=2.90/(2360-1700)=0.00439\%/ \mu\text{m}$  となる。あるいは、定義式に当てはめると、 $q=dQ/dx=-d(1-Q)/dx=-(4.10-1.20)/(1700-2360)=0.00439\%/ \mu\text{m}$  となり、上と同じ計算結果を得る。積算分布の「ある基準粒子径」は、各粒子径範囲を代表する粒子径と考えればよい。ふるいをういた場合は、ふるい目開きが基準粒子径となる。また、顕微鏡で観察した投影像を用いた場合は、粒子径範囲を任意に区切る。たとえば  $100\ \mu\text{m}$  から  $10\ \mu\text{m}$  ごとに区切っていったとして、 $90\sim 100\ \mu\text{m}$  の粒子径範囲に含まれる粒子を一律  $95\ \mu\text{m}$  とみなせば、その値が基準粒子径となる。その隣の  $80\sim 90\ \mu\text{m}$  の範囲であれば、 $85\ \mu\text{m}$  が第二の基準粒子径となる。なお、粒子径範囲の下限値( $80, 90\ \mu\text{m}$ )を基準粒子径に用いる場合もある。また、粒子径範囲の区切り幅は、等間隔でなくてもよい。頻度分布の単位 $[\%/\mu\text{m}]$ の分母は、粒子径範囲の区切り幅に相当し、自分で決めた幅にしてよい。 $10\ \mu\text{m}$  ごとであれば、 $[\%/(10\ \mu\text{m})]$ となる。ただし、頻度分布の場合、頻度の単位が異なるものどうしでの比較はできないので、 $1\ \mu\text{m}$  あたりに統一しておくといよい。

積算分布を用いた場合の平均粒子径は、**メジアン径**(中位径, median diameter)で表される。一方の積算分布を作成しておき、 $50\%$ における粒子径を読むか、あるいは両方の積算分布を作成したならば、両者の交

点を読んでもよい。下図の場合、約 860  $\mu\text{m}$  となる。一方、頻度分布の場合は、モード径(最頻径, modal diameter)で表される。最も頻度の大きい所の粒子径を読むが、ヒストグラム表示の場合は幅があるので、一義的に決まらない場合がある。とくに指定が無ければ、幅の中央値を読む。下図の場合、約 720  $\mu\text{m}$  となる。粒子径分布の形状よりバラツキの程度を定性的に判断することができる。積算分布の場合は、傾斜が急峻であるほど粒子径がよく揃っている。一方、頻度分布の場合は、分布の幅が狭く、ピークの高さが高いほど粒子径がよく揃っている。(かりにすべての粒子径が 1000  $\mu\text{m}$  であったとして、積算分布・頻度分布ともにどのような形状になるか想像してみよ。)

表 2.1.1 粒子径分布の解析例 [文献 2]

ふるい目開き [ $\mu\text{m}$ ]	粒子質量割合 [%]	積算ふるい上 [%]	積算ふるい下 [%]	頻度 [%/ $\mu\text{m}$ ]
$x$	$w \times 100$	$1-Q$ または $R$	$Q$ または $U$	$q$ または $f$
3350	0.00	0.00	100	
				0.00121
2360	1.20	1.20	98.8	
				0.00439
1700	2.90	4.10	95.9	
				0.03615
1180	18.8	22.9	77.1	
				0.08727
850	28.8	51.7	48.3	
				0.08800
600	22.0	73.7	26.3	
				0.06343
425	11.1	84.8	15.2	
				0.04800
300	6.00	90.8	9.20	
				0.04432
212	3.90	94.7	5.30	
				0.03065
150	1.80	96.6	3.40	
				0.02727
106	1.30	97.8	2.20	
				0.02075
0(受皿)	2.20	100	0.00	



の中心軸(平均)を表す  $\mu$  を与えることで分布形状が決まる。上表の粒子径データを上式に当てはめた結果を下図に示す。現在は表計算ソフトを用いることで分布曲線を描かずとも  $\sigma$  と  $\mu$  を容易に推定できる時代だが、昔は**正規確率紙**を用いて正規分布曲線を直線で表し、図上で  $\sigma$  と  $\mu$  を読み取っていた。正規確率紙(片対数紙に似ているが、異なる)の縦軸は**確率目盛**と呼ばれ、上式を積算した値、すなわち正規分布の積分値(累積の面積)を表す。標準偏差  $\sigma$  は、積算ふるい下 84.13%径  $x_{84.13}$  と 50%径  $x_{50}(=\mu)$  の差で与えられる。

$$\sigma = x_{84.13} - x_{50} \quad \cdots(2.1.2)$$

あるいは、 $x_{50}$  と  $x_{15.87}$  の差で与えられる。

$$\sigma = x_{50} - x_{15.87} \quad \cdots(2.1.3)$$

粒子径データが理想的な正規分布にしたがう場合は、上の2式は同じ値となる。しかし、実際には理論曲線からのずれを伴うことから、両式の算術平均を標準偏差  $\sigma$  として採用する。

$$\sigma = \frac{(x_{84.13} - x_{50}) + (x_{50} - x_{15.87})}{2} \quad \cdots(2.1.4)$$

$$\sigma = \frac{x_{84.13} - x_{15.87}}{2} \quad \cdots(2.1.5)$$

バラツキの定量的評価には、**変動係数  $CV$  (coefficient of variation)**を用いる。変動係数  $CV$  は、分布解析より求められる**標準偏差  $\sigma$  (standard deviation)**と**平均  $\mu$  (mean)**の比で定義される。値が小さい程、バラツキは小さく、分布幅が狭い。

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 \quad [\%] \quad \cdots(2.1.6)$$

$$CV = \frac{x_{84.13} - x_{15.87}}{2x_{50}} \times 100 \quad [\%] \quad \cdots(2.1.7)$$

正規確率紙上で  $x_{84.13}$ 、 $x_{50}$ 、 $x_{15.87}$  を読み取ると、変動係数  $CV$  は次式で求められる。

$$CV = \frac{1290 - 450}{(2)(880)} \times 100 \approx 48 \% \quad \cdots(2.1.8)$$

バラツキの情報は標準偏差が持っていることから、変動係数  $CV$  は必要無いと思うかもしれない。 $CV$  を用いることで、粒子径スケールによらないバラツキの相対的評価が可能となる。たとえば、平均粒子径  $1 \mu\text{m}$  の炭酸カルシウム粒子を  $\pm 10\%$  ( $\pm 0.1 \mu\text{m}$ ) のバラツキで作製した場合と、平均粒子径  $1000 \mu\text{m}$  のカリミヨウバン粒子を  $\pm 10\%$  ( $\pm 100 \mu\text{m}$ ) のバラツキで作製した場合とでは、いずれがより粒子径が揃っていると言えるだろうか。一見すると、カリミヨウバンの方が  $\pm 100 \mu\text{m}$  なのでバラツキが大きいのに見える。しかし、それ以前に、カリミヨウバンの方が平均粒子径が大きいことから、バラツキの幅が大きく出るのは当然のようにも思える。たんに平均粒子径が大きいからバラツキも大きいというのでは腑に落ちない。そのような場合に、 $CV$  が有用である。すなわち、バラツキの絶対値を平均粒子径で割ると、炭酸カルシウムは  $(0.1 \mu\text{m}/1 \mu\text{m}) \times 100 = 10\%$ 、カリミヨウバンは  $(100 \mu\text{m}/1000 \mu\text{m}) \times 100 = 10\%$  となる。粒子径の揃い具合は、どちらも同じであるということになる。なお、晶析分野では、変動係数 20%以下の結晶粒子群を均質性の高い**単分散結晶 (monodisperse crystals)**とみなす。また、コロイド化学分野では、10%程度以下を**単分散粒子 (monodisperse particles)**とみなす。

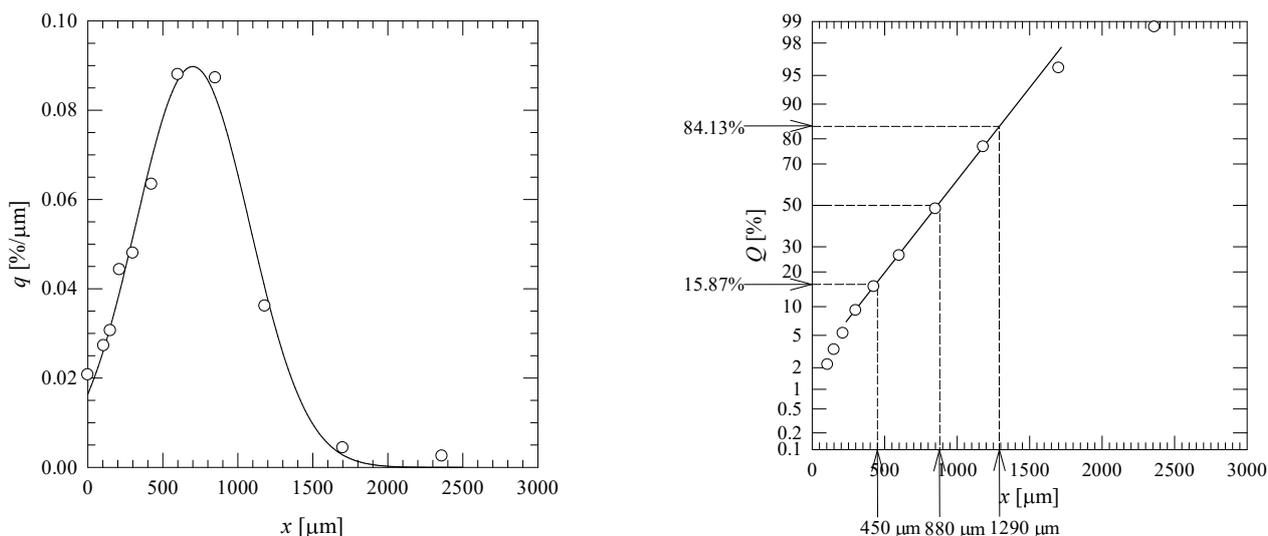


図 2.1.3 正規分布式を用いた当てはめ結果(左)と正規確率紙を用いた解析(右) [文献 2]

正規分布を用いることの問題点として、①分布形状が左右対称性であるために  $x$  軸が負の値を取りうること、②とくに個数基準の場合は、ピーク位置が微小粒子径側に偏りやすく、左右非対称の分布形状になること、が挙げられる。そのような場合は、対数正規分布(lognormal distribution)を用いる。正規確率紙の  $x$  軸を対数軸に置き換えると対数正規確率紙となるので、正規確率紙と同じように分布パラメーターを図上で読み取ることができる。

$$y = \frac{1}{\ln \sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\ln x - \ln \mu)^2}{2 \ln^2 \sigma_g} \right] \quad \dots(2.1.9)$$

標準偏差  $\sigma_g$  は、対数積算ふるい下 84.13%径  $\ln x_{84.13}$  と対数 50%径  $\ln x_{50} (= \ln \mu)$  の差で与えられる。

$$\ln \sigma_g = \ln x_{84.13} - \ln x_{50} \quad \dots(2.1.10)$$

あるいは、 $\ln x_{50}$  と  $\ln x_{15.87}$  の差で与えられる。

$$\ln \sigma_g = \ln x_{50} - \ln x_{15.87} \quad \dots(2.1.11)$$

両式の算術平均を標準偏差  $\sigma_g$  として採用する。

$$\ln \sigma_g = \frac{(\ln x_{84.13} - \ln x_{50}) + (\ln x_{50} - \ln x_{15.87})}{2} \quad \dots(2.1.12)$$

$$\ln \sigma_g = \frac{\ln x_{84.13} - \ln x_{15.87}}{2} \quad \dots(2.1.13)$$

$$\ln \sigma_g = \ln \left( \frac{x_{84.13}}{x_{15.87}} \right)^{0.5} \quad \dots(2.1.14)$$

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{x_{84.13}}{x_{15.87}}} \quad \dots(2.1.15)$$

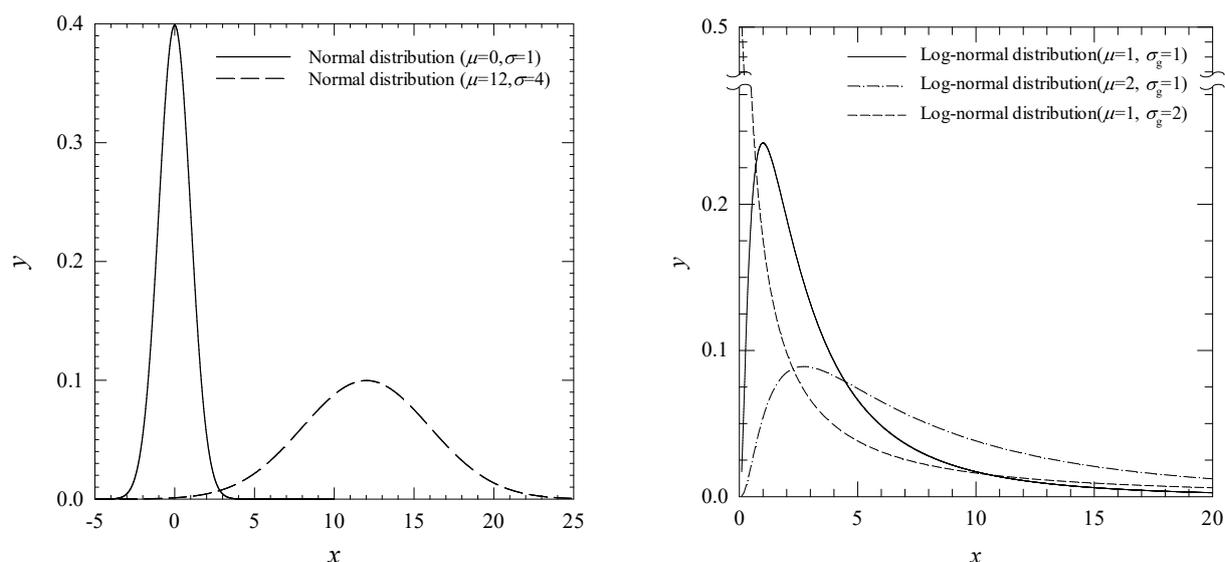


図 2.1.4 正規分布(左)と対数正規分布(右)

正規分布と対数正規分布のいずれの場合も、たとえば微小粒子と粗大粒子が混在して分布形状が多峰性を示す場合は、複数の単峰性分布に分割して個別に平均や標準偏差を解析する必要がある。粉砕物などバラツキが顕著な粒子群には、**ロジン・ラムラー分布(Rosin-Rammler distribution)**が簡便である。

$$(R \text{ が質量分率の場合}) \quad R = \exp(-x/x_e)^n \quad \cdots(2.1.3)$$

$$(R \text{ が百分率の場合}) \quad R = 100 \exp(-x/x_e)^n \quad \cdots(2.1.4)$$

ただし、 $n$ は**均等数(distribution constant)**であり、分布のバラツキの程度を表す。この値が大きいほどバラツキが小さく、分布幅は狭い。 $x_e$ は**粒度特性数(absolute size constant)**であり、ふるい上曲線の 36.8%に相当する代表粒子径であり、平均粒子径に相当する。 $R$ は積算ふるい上分布[-]または[%]。

上式を変形すると、次式が導かれる。

$$(R \text{ が質量分率の場合}) \quad \ln\left(\ln\frac{1}{R}\right) = n \ln x - n \ln x_e \quad \cdots(2.1.5)$$

$$(R \text{ が百分率の場合}) \quad \ln\left(\ln\frac{100}{R}\right) = n \ln x - n \ln x_e \quad \cdots(2.1.6)$$

$\ln x$  に対して  $\ln[\ln(1/R)]$  または  $\ln[\ln(100/R)]$  をプロットしたときに直線関係が見出されるならば、傾きより  $n$  が、切片より  $x_e$  がそれぞれ求まる。**ロジン・ラムラープロット(Rosin-Rammler plot)**の例を下図に示す。傾きより  $n=1.793$ 、切片より  $-n \ln x_e = -12.43 \rightarrow x_e = \exp(12.43/1.793) = 1025 \mu\text{m}$  と求められる。ロジン・ラムラー分布は、自然対数を 2 回作用させた式になっていることから分かるように、バラツキがきわめて大きい粒子群に対しても近似直線に強力に当てはめる点で便利である。

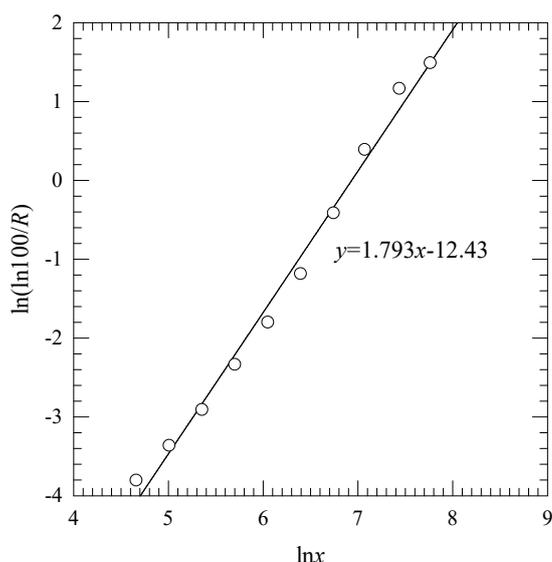


図 2.1.5 ロジック・ラムラープロットの例

## 2. 2 分布関数 [文献 3]

平均頻度分布  $\bar{q}_r(x)$  [1/m] は、ある粒子径幅  $\Delta x$  [m] あたりに含まれる粒子量の割合  $\Delta Q_r(x)$  [-] で表される。

$$\bar{q}_r(x) = \frac{\Delta Q_r(x)}{\Delta x} \left[ = \frac{Q_r(x + \Delta x) - Q_r(x)}{(x + \Delta x) - x} \right] \quad \dots(2.2.1)$$

粒子径幅  $\Delta x$  [m] を無限小とすることで、頻度分布  $q_r(x)$  [1/m] が導かれる。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{q}_r(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_r(x)}{\Delta x} = \frac{dQ_r(x)}{dx} \left[ \equiv q_r(x) \right] \quad \dots(2.2.2)$$

$$\boxed{q_r(x) = \frac{dQ_r(x)}{dx}} \quad \dots(2.2.3)$$

上式の  $r$  値の意味は、 $r=0$ (個数基準)、 $1$ (長さ基準)、 $2$ (面積基準)、 $3$ (質量基準)である。たとえば、球形粒子における個数基準から質量基準および面積基準への変換は、それぞれ次式で表される。

$$q_3(x) = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 \rho_p q_0(x)}{\int_0^\infty \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 \rho_p q_0(x) dx} = \frac{x^3 q_0(x)}{\int_0^\infty x^3 q_0(x) dx} \quad \dots(2.2.4)$$

$$q_2(x) = \frac{4\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 q_0(x)}{\int_0^\infty 4\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 q_0(x) dx} = \frac{x^2 q_0(x)}{\int_0^\infty x^2 q_0(x) dx} \quad \dots(2.2.5)$$

一般的な変換式は、次式で与えられる。

$$q_r(x) = \frac{\phi_r x^r q_0(x)}{\int_0^\infty \phi_r x^r q_0(x) dx} = \frac{x^r q_0(x)}{\int_0^\infty x^r q_0(x) dx} \quad \dots(2.2.6)$$

ただし、 $\rho_p$ は粒子密度[ $\text{kg/m}^3$ ]、 $\phi$ は形状係数[-]。

$q_r(x)$ は確率密度関数であり、確率(割合)そのものではないことに留意する必要がある。 $q_r(x)$ に区画幅  $dx$  を乗じたもの(面積)が確率を表す。また、 $\bar{q}_r(x)$ は頻度ヒストグラム(離散量)の総和計算に、 $q_r(x)$ は頻度分布曲線(連続量)の積分計算に用いる。

積算ふるい下分布  $Q_r(x)$  [-]または  $U(x)$ は、ある粒子径  $x$  [m]以下に含まれる累積の粒子量割合を表す。

$$Q_r(x) = \int_0^x q_r(x) dx \quad [\equiv U(x)] \quad \cdots(2.2.7)$$

あるいは、総和を用いて表すと、次式となる。

$$Q_r(x) = \sum_{i=1}^m \bar{q}_r(x_i) \Delta x_i \quad \cdots(2.2.8)$$

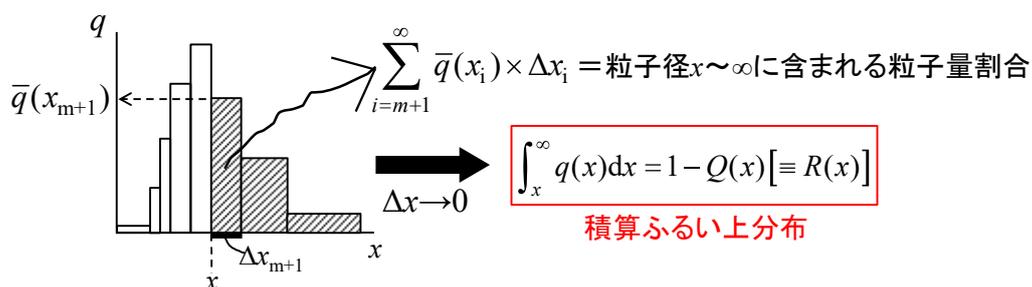
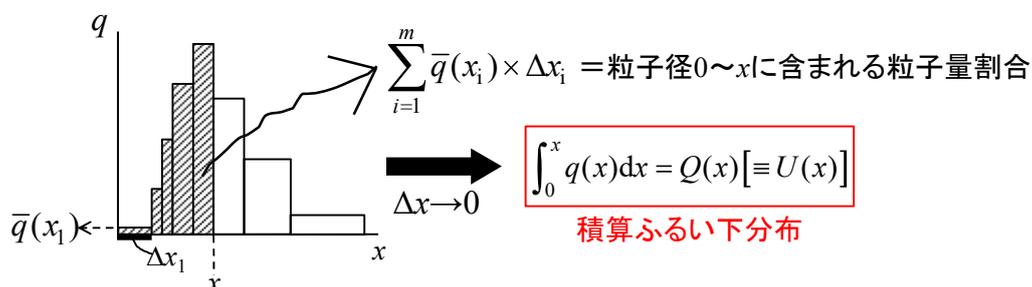
積算ふるい上分布  $1-Q_r(x)$  [-]または  $R(x)$ は、ある粒子径  $x$  [m]以上に含まれる累積の粒子量割合を表す。

$$1-Q_r(x) = \int_x^\infty q_r(x) dx \quad [\equiv R(x)] \quad \cdots(2.2.9)$$

あるいは、総和を用いて表すと、次式となる。

$$1-Q_r(x) = \sum_{i=m+1}^\infty \bar{q}_r(x_i) \Delta x_i \quad \cdots(2.2.10)$$

積算ふるい下分布  $Q_r(x)$ は、はじめの粒子量割合  $Q_r(x)$ と同義である。



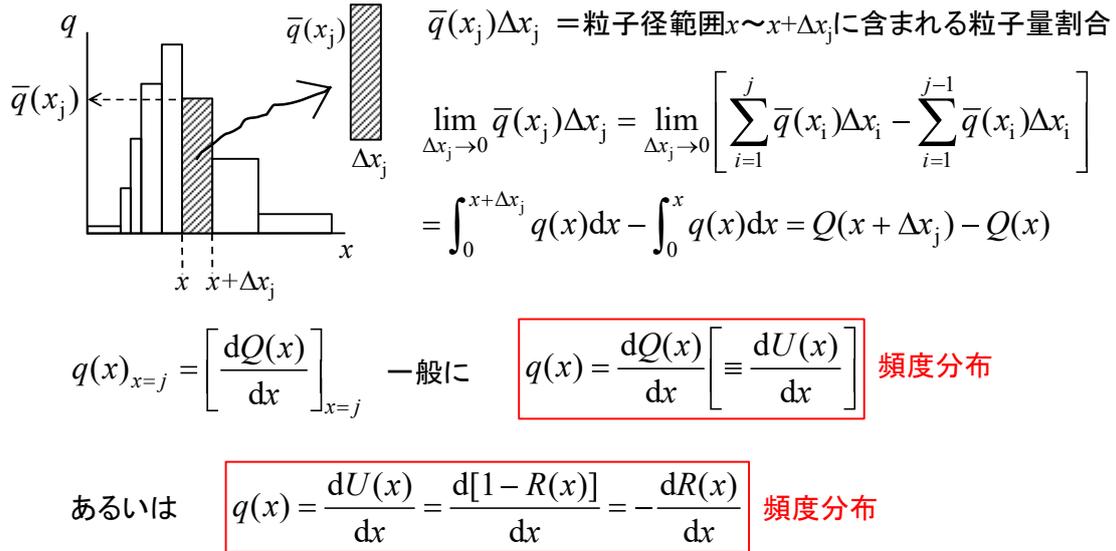


図 2.2.1 分布関数の説明図

### 3. 平均粒子径

下表に示されるように複数の定義があり、粒子の性状や粒子径分布の種類などに応じて使い分けされる。報告者は、いずれの平均径を用いたのかを明記する必要がある。

表 3.1 主な平均粒子径 [文献 4]

分類	名称	記号	定義
数学的平均径	算術平均径	$x_a$	$x_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$
	幾何平均径	$x_g$	$\log x_g = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_N}{N}$
	調和平均径	$x_h$	$\frac{1}{x_h} = \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_N} \right) / N$
加重平均径	個数平均径	$x_{1,0}$	$x_{1,0} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$
	長さ平均径	$x_{2,1}$	$x_{2,1} = \frac{\sum n_i x_i^2}{\sum n_i x_i}$
	面積平均径	$x_{3,2}$	$x_{3,2} = \frac{\sum n_i x_i^3}{\sum n_i x_i^2}$
	体積平均径	$x_{4,3}$	$x_{4,3} = \frac{\sum n_i x_i^4}{\sum n_i x_i^3}$
球状粒子径	平均面積径	$\bar{x}_S$	$\bar{x}_S = \sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{\sum n_i}}$

	平均体積径	$\bar{x}_V$	$\bar{x}_V = \sqrt[3]{\frac{\sum n_i x_i^3}{\sum n_i}}$
上記以外	メジアン径	$x_{50}$	—
	モード径	$x_m$	—
	比表面積径	$x_{PS}$	$x_{PS} = \frac{\phi}{S_V}$ または $x_{PS} = \frac{\phi}{\rho_p S_W}$

### 3. 1 数学的平均径

数学的平均径(mathematics mean diameter)は、算術平均径  $x_a$ 、幾何平均径  $x_g$ 、調和平均径  $x_h$  に分類される。粒子の総数を  $N[-]$  とすると、それぞれ次式で定義される。

$$\text{(算術平均径)} \quad x_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \quad \dots(3.1.1)$$

$$\text{(幾何平均径)} \quad \log x_g = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_N}{N} \quad \dots(3.1.2)$$

$$\text{(調和平均径)} \quad \frac{1}{x_h} = \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_N} \right) / N \quad \dots(3.1.3)$$

算術平均径(arithmetic mean diameter)は、粒子径のバラツキが正規分布にしたがう場合に用いる。このことは、算術平均(相加平均)がバラツキの重心に相当することからも理解される。たとえば、1と2と6の算術平均は(1+2+6)/3=3である。いま、これらの数値が直線上にあって1, 2, 6の位置に1gのおもりがぶら下がっているものとする。位置3からの距離(うでの長さ)とおもりの積で力のモーメント(回転力)を考えると、(2-1)(1g)+(2-2)(1g)=(6-3)(1g)となってちょうどつりあうことから、算術平均3が重心の位置になっていることが分かる。正規分布の重心の位置は、平均  $\mu$  であることから、この  $\mu$  は算術平均で取ることが望ましいと言える。

幾何平均径(geometric mean diameter)は、粒子径のバラツキが対数正規分布にしたがう場合に用いる。このことは、対数正規分布の平均が  $\ln \mu$  で表されることから理解される。対数を作用させることは、数値間のバラツキを見た目上小さくする効果がある。このことから、幾何平均径は、粒子径のバラツキが大きい場合に有効である。たとえばいま、粒子径 1 nm(=10<sup>0</sup> nm)、1 μm(=10<sup>3</sup> nm)、1 mm(=10<sup>6</sup> nm)の粒子が一粒ずつあるものとする。これらの算術平均径を求めると、 $x_a=(10^0+10^3+10^6)/3=333667 \text{ nm} \approx 333 \mu\text{m}$  となり、粒子径 1 nm の存在など歯牙にもかけない計算結果である。一方、幾何平均径を求めると、 $\log_{10} x_g=(\log_{10} 10^0 + \log_{10} 10^3 + \log_{10} 10^6)/3=(0+3+6)/3=3 \rightarrow x_g=10^3 \text{ nm}=1 \mu\text{m}$  となり、粒子径 1 nm の存在に配慮した計算結果であることが感じられる。幾何平均(相乗平均)は、真数と同じである場合、べき乗の算術平均に等しい。上の例だと、 $x_g$  のべき乗 3 は、三つの粒子径のべき乗 0, 3, 6 の算術平均になっている。このことは、定義式をよく考えれば理解できるであろう。社会科学の分野では、地価の平均上昇率など割合(もとの値からの増減分)を平均する場合に用いる。

調和平均径(harmonic mean diameter)は、粒子充填層を構成する粉体粒子の比表面積径に対して用いることで、充填層の平均比表面積(算術平均)を見積もる場合に用いる。比表面積径の調和平均が比表面積の算術平均に等しいことの証明について、たとえばいま、比表面積径  $x_{PS1}, x_{PS2}, x_{PS3} [\text{m}]$  の粒子が1個ずつあるとする。これらの調和平均径  $x_h$  は、次式で表される。

$$\frac{1}{x_h} = \left( \frac{1}{x_{PS1}} + \frac{1}{x_{PS2}} + \frac{1}{x_{PS3}} \right) / 3 \quad \dots(3.1.4)$$

いずれも同じ粒子形状であることを仮定すると、次式となる。

$$\frac{\phi}{x_h} = \left( \frac{\phi}{x_{PS1}} + \frac{\phi}{x_{PS2}} + \frac{\phi}{x_{PS3}} \right) / 3 \quad \dots(3.1.5)$$

上式の各項は、粒子の比表面積に他ならない。

$$S_{vh} = \frac{S_{V1} + S_{V2} + S_{V3}}{3} \quad \dots(3.1.6)$$

したがって、粒子形状が等しい条件下では、各項の形状係数が消去されることから、調和平均径がそのまま平均比表面積を表すことが理解される。このことは、比表面積径が比表面積の逆数になっていることに基づく。

調和平均の利用例としては、速度の平均がある。いま、家から 600 m 先の公園まで徒歩で出かけるものとする。行きは分速 150 m、帰りは分速 300 m で戻ったとする。行きと帰りの平均分速は何 m だろうか。算術平均で  $(150+300)/2=225$  m/分とやってしまうと間違いである。所要時間について、行きは  $600/150=4$  分、帰りは  $600/300=2$  分かかる。したがって、往復 1200 m を計 6 分で移動することになるので、 $1200/6=200$  m/分が正しい。この値は、行きと帰りの分速の調和平均を取ることで求めることができる。これは、速度の単位の子である距離が基準値(一定値)となっているために起こる。このように、分子の単位が一定となっている場合の平均は、調和平均となる。ここで、分速の代わりに「1m 進むのにかかる時間」[分/m]を用いることにする。この場合は、基準値が分母にくるので算術平均を取ることになる。すなわち、 $\{(1/150)+(1/300)\}/2=1/200=0.005$  分/m となり、これは上で述べた往復 1200 m の平均分速 200 m/分の逆数に等しいから、算術平均でよいことになる。[文献 5]

### 3. 2 加重平均径

**加重平均径**(weighted average diameter)は、**重み付き平均径**とも呼ばれ、第  $i$  番目の粒子径範囲  $\Delta x_i$  における代表粒子径  $x_i$  に重みを乗じた量の総和で表される。重みとは、粒子数  $n_i$  をもとに、個数、長さ、面積、体積(質量)の割合を表現したものである。粒子径範囲と代表粒子径の決め方は任意であり、粒子径分布の章で述べた通りである。重みと加重平均径の定義式を下表に整理する。**個数平均径**  $x_{1,0}$  は、おおむね数十  $\mu\text{m}$  以下の微粒子の場合に用いることが多い。**長さ平均径**  $x_{2,1}$  は、アスペクト比の大きい針状粒子の場合に用いることがある。長さ  $n_i x_i$  の意味について、代表粒子径  $x_i$  のものが  $n_i$  個ある場合、これを横一列に並べると、その全長が代表長さ  $n_i x_i$  になる、ということである。各粒子径範囲における代表径  $x_1, x_2, \dots$  の全長の総和は、 $\Sigma n_i x_i$  で表される。**面積平均径**  $x_{3,2}$  は、投影径を解析する場合に用いることが多い。**体積平均径**  $x_{4,3}$  は、おおむね数百  $\mu\text{m}$  以上の粗大粒子の場合に用いることが多い。

顕微鏡観察による投影像をもとに粒子群のフェレー径を測定し、任意の粒子径範囲ごとの粒子数と加重平均径を解析した結果を下表に示す。個数平均径であれば、粒子数割合を乗じるので、表中のデータと照らし合わせて、妥当な計算結果と言える。一方、体積平均径であれば、粒子数に比して粒子体積、すなわち粒子径の 3 乗に比例する部分の影響が大きくなることを考慮すると、計算結果がより粗大粒徑側に移ることが理解される。

粒子径の基準によって平均径が大きく変わることが分かる。いずれか一方が正しいというのではなく、あくまでその解析方法を選択した中での解にすぎない。粒子径の取り方や測定装置が変わると値は変化する。平均粒子径を報告する際は、第三者が追試できるように、粒子径の定義や測定法、平均の取り方などの詳細も併せて報告する必要がある。

表 3.2.1 加重平均径

基準	個数	長さ	面積	体積
重み	$\frac{n_i}{\sum n_i}$	$\frac{n_i x_i}{\sum n_i x_i}$	$\frac{n_i x_i^2}{\sum n_i x_i^2}$	$\frac{n_i x_i^3}{\sum n_i x_i^3}$
加重平均径	$x_{1,0} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$	$x_{2,1} = \frac{\sum n_i x_i^2}{\sum n_i x_i}$	$x_{3,2} = \frac{\sum n_i x_i^3}{\sum n_i x_i^2}$	$x_{4,3} = \frac{\sum n_i x_i^4}{\sum n_i x_i^3}$

表 3.2.2 平均粒子径の計算例 [文献 6, 7]

$\Delta x_i$ [ $\mu\text{m}$ ]	60~70	50~60	40~50	30~40	20~30	10~20	5~10	0~5
$x_i$ [ $\mu\text{m}$ ]	65	55	45	35	25	15	7.5	2.5
$n_i$ [-]	87	100	156	660	1750	6200	25600	155000
$n_i x_i$	5655	5500	7020	23100	43750	93000	192000	387500
$n_i x_i^2$	367575	302500	315900	808500	1093750	1395000	1440000	968750
$n_i x_i^3$	23892375	16637500	14215500	28297500	27343750	20925000	10800000	2421875
$n_i x_i^4$	1553004375	915062500	639697500	990412500	683593750	313875000	81000000	6054688
$\sum n_i$	189553							
$\sum n_i x_i$	757525							
$\sum n_i x_i^2$	6691975							
$\sum n_i x_i^3$	144533500							
$\sum n_i x_i^4$	5182700313							
$n_i / \sum n_i$	0.000458975	0.000527557	0.000822989	0.003481876	0.009232246	0.03270853	0.135054576	0.817713252
$n_i x_i / \sum n_i x_i$	0.0074651	0.007260486	0.009267021	0.030494043	0.05775387	0.122768225	0.253456982	0.511534273
$n_i x_i^2 / \sum n_i x_i^2$	0.054927731	0.045203397	0.047205795	0.120816351	0.163442033	0.208458639	0.215183111	0.144762944
$n_i x_i^3 / \sum n_i x_i^3$	0.165306832	0.115111722	0.098354361	0.19578506	0.189186244	0.144776125	0.074723161	0.016756496
$x_{1,0}$ [ $\mu\text{m}$ ]	4.00							
$x_{2,1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	8.83							
$x_{3,2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	21.6							
$x_{4,3}$ [ $\mu\text{m}$ ]	35.8							

(個数平均径)  $x_{1,0} = \frac{(87 \times 65) + (100 \times 55) + \dots + (155000 \times 2.5)}{87 + 100 + \dots + 155000} \approx 4.00 \mu\text{m}$

(長さ平均径)  $x_{2,1} = \frac{(87 \times 65^2) + (100 \times 55^2) + \dots + (155000 \times 2.5^2)}{(87 \times 65) + (100 \times 55) + \dots + (155000 \times 2.5)} \approx 8.83 \mu\text{m}$

(面積平均径)  $x_{3,2} = \frac{(87 \times 65^3) + (100 \times 55^3) + \dots + (155000 \times 2.5^3)}{(87 \times 65^2) + (100 \times 55^2) + \dots + (155000 \times 2.5^2)} \approx 21.6 \mu\text{m}$

(体積平均径)  $x_{4,3} = \frac{(87 \times 65^4) + (100 \times 55^4) + \dots + (155000 \times 2.5^4)}{(87 \times 65^3) + (100 \times 55^3) + \dots + (155000 \times 2.5^3)} \approx 35.8 \mu\text{m}$

### 3.3 球状粒子径

平均体積径(mean volume diameter)  $\overline{x_v}$  は、いびつな粒子群の平均体積に等しい単一球の粒子径で定義される。粒子群がすべて同じ形状のとき、全粒子の平均体積  $V_{av}$  は、次式で表される。

$$V_{\text{av}} = \frac{\sum n_i V_i}{\sum n_i} \quad \cdots(3.3.1)$$

$$V_{\text{av}} = \frac{\sum n_i \phi_V x_i^3}{\sum n_i} \quad \cdots(3.3.2)$$

上式と等しい体積  $V_{\text{av}}$  をもつ単一粒子の粒子径が平均体積径  $\bar{x}_V$  であることから、次式が成り立つ。

$$V_{\text{av}} = \phi_V \bar{x}_V^3 \quad \cdots(3.3.3)$$

上式を式(3.3.2)に代入して  $V_{\text{av}}$  を消去すると、平均体積径  $\bar{x}_V$  を得る。

$$\phi_V \bar{x}_V^3 = \frac{\sum n_i \phi_V x_i^3}{\sum n_i} \quad \cdots(3.3.4)$$

$$\bar{x}_V = \sqrt[3]{\frac{\sum n_i x_i^3}{\sum n_i}} \quad \cdots(3.3.5)$$

平均表面積径(mean surface diameter)  $\bar{x}_S$  は、いびつな粒子群の平均表面積に等しい単一球の粒子径で定義される。上記と同様の考え方に基づいて導かれる。

$$\bar{x}_S = \sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{\sum n_i}} \quad \cdots(3.3.6)$$

## 4. 粒子形状

### 4. 1 形状係数

形状係数(shape factor)は、粒子形状の数値化に用いる。いびつな単一粒子の表面積  $S_p$  [ $\text{m}^2$ ]は自身の粒子径の2乗に比例し、体積  $V_p$  [ $\text{m}^3$ ]と質量  $W_p$  [ $\text{kg}$ ]は粒子径の3乗に比例する。これらの比例関係は、次の一般式で表される。

$$S_p = \phi_S x^2 \quad \cdots(4.1.1)$$

$$V_p = \phi_V x^3 \quad \cdots(4.1.2)$$

$$W_p = \phi_V \rho_p x^3 \quad \cdots(4.1.3)$$

ただし、 $\phi_S$ は表面積形状係数[－]、 $\phi_V$ は体積形状係数[－]。

粒子群の場合は、上の3式の右辺に粒子数  $N$  [－]を乗じて、左辺を総表面積、総体積、総重量とみなすことで対応できる。あるいは、粒子数  $N$  の概算に用いることもできる。

体積基準と質量基準の比表面積  $S_V$  [ $\text{m}^2/\text{m}^3$ ]と  $S_W$  [ $\text{m}^2/\text{kg}$ ]は、それぞれ上式を用いて以下のように表される。

$$S_V = \frac{S_p}{V_p} = \frac{\phi_s x^2}{\phi_v x^3} = \frac{\phi}{x_{PS}} \left[ \phi \equiv \frac{\phi_s}{\phi_v} \right] \quad \cdots(4.1.4)$$

$$S_W = \frac{S_p}{W_p} = \frac{\phi_s x^2}{\phi_v \rho_p x^3} = \frac{\phi}{\rho_p x_{PS}} \quad \cdots(4.1.5)$$

ただし、 $x_{PS}$  は比表面積径[m]、 $\phi$ は比表面積形状係数[-]。

球粒子の表面積形状係数 $\phi_s$ は、球の表面積と一般式(4.1.1)を等置して求められる。

$$\phi_s x^2 = 4\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad \cdots(4.1.6)$$

$$\boxed{\phi_s = \pi} \quad \cdots(4.1.7)$$

球粒子の体積形状係数 $\phi_v$ は、球の体積と一般式(4.1.2)を等置して求められる。

$$\phi_v x^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^3 \quad \cdots(4.1.8)$$

$$\boxed{\phi_v = \frac{\pi}{6}} \quad \cdots(4.1.9)$$

球粒子の比表面積形状係数 $\phi$ は、形状係数の比より求められる。

$$\phi = \frac{\phi_s}{\phi_v} \quad \cdots(4.1.10)$$

$$\boxed{\phi = 6} \quad \cdots(4.1.11)$$

同様にして、立方体粒子の各形状係数は、それぞれ $\phi_s=6$ 、 $\phi_v=1$ 、 $\phi=6$ と求められる。また、高さ $h$ と直径 $d$ の等しい円柱粒子の各形状係数は、それぞれ $\phi_s=3\pi/2$ 、 $\phi_v=\pi/4$ 、 $\phi=6$ と求められる。

上記のほか、カルマンの形状係数 $\phi_c$ もよく用いられる。

$$\phi_c = \frac{6}{S_V x_V} \left[ x_V \equiv \sqrt[3]{\frac{6V_p}{\pi}} \right] \quad \cdots(4.1.12)$$

カルマンの形状係数は、球からのずれの程度を表しており、球のとき $\phi_c=1$ となる。

## 4. 2 形状指数

**形状指数(shape index)**は、同一粒子の形状比較に用いる。**長短度**は、**アスペクト比(aspect ratio)**とも呼ばれ、三軸径における長径と短径の比( $x_l/x_b$ )で表される(縦と横の長さの比)。この値が大きい程、粒子形状は針状に近づく。一方、**扁平度**は、三軸径における厚みと短径の比( $x_b/x_t$ )で表される。この値が大きい程、粒子形状は板状に近づく。

**球形度  $\psi$  (プサイ, sphericity)**[-]は、実粒子と同じ体積をもつ球(等体積球)の表面積  $S_{pV}$  と実粒子の表面積  $S_p$  の比( $S_{pV}/S_p$ )で定義される。この値が1に近い程、粒子形状は球に近い。たとえば、立方体の球形度

は、次のようにして求めることができる。

①**等体積球の表面積**：実粒子である立方体の一辺の長さを 1 とすると、実粒子の体積は 1 である。これと同じ体積をもつ球の半径  $r$  は、 $1=(4\pi/3)r^3 \rightarrow r=(3/4\pi)^{1/3}$  となることから、等体積球の表面積は、 $S_{pv}=4\pi r^2=4\pi(3/4\pi)^{2/3}$  となる。

②**実粒子の表面積**：面積 1 の面が全部で 6 つあるので、 $S_p=6$  となる。

③**球形度**： $\psi=S_{pv}/S_p=4\pi(3/4\pi)^{2/3}/6=0.806$ 。立方体は、8 割がた球に近い形状と言える。

## 5. 粒子密度

単一粒子の密度は、内部に空孔や割れ目などが存在しない理想的な粒子に対する**真密度(true density)** $\rho_t$  [kg/m<sup>3</sup>]と、空孔や割れ目などを含めて定義される**粒子密度(particle density)** $\rho_p$  [kg/m<sup>3</sup>]に大別される。粒子密度といえば、ふつうは後者を指す。また、粒子群に対する定義として、容器に入れた粉体の重量と粒子空隙を含めたかさ体積の比で表される**かさ密度(bulk density)** $\rho_b$  [kg/m<sup>3</sup>]がある。

$$\rho_t = \frac{W_p}{V_t} \quad \cdots(5.1)$$

$$\rho_p = \frac{W_p}{V_t + V_i} = \frac{W_p}{V_p} \quad \cdots(5.2)$$

$$\rho_b = \frac{W_p}{V_t + V_i + V_e} = \frac{W_p}{V_p + V_e} = \frac{W_p}{V_b} \quad \cdots(5.3)$$

ただし、 $V$ は粒子体積[m<sup>3</sup>]、 $W_p$ は粒子質量[kg]。添え字  $e$  は粒子間空隙の体積、 $i$  は粒子内部の空孔体積、 $p$  は真の体積に空孔体積を含めた値、 $t$  は粒子の真の体積。 $V_p$ (または  $V_t$ )と  $W_p$  は、粒子 1 個と複数個の両方の場合に適用される。(複数個の場合は、 $V_p$ (または  $V_t$ )と  $W_p$  を粒子数で割れば、1 個あたりになる。) 粒子密度とかさ密度の間には、次の関係式が成り立つ。

$$\rho_b = \rho_p \frac{V_p}{V_b} \quad \cdots(5.4)$$

$$\boxed{\rho_b = \rho_p(1 - \varepsilon)} \quad \cdots(5.5)$$

ただし、 $\varepsilon$  は空隙率[-]であり、充填層体積に対する空隙体積の比で定義される。

## 6. 空隙率

**空隙(げき)率**あるいは**空間率** $\varepsilon$  (porosity)は、粒子充填層の全体積  $V_b$  [m<sup>3</sup>]に対する空隙体積  $V_e$  [m<sup>3</sup>]の比で定義される。

$$\varepsilon = \frac{V_e}{V_b} \quad \cdots(6.1)$$

空隙体積  $V_e$  を直接測定することは難しい。そこで、 $V_e$  を充填層体積  $V_b$  と充填層内の粒子体積  $V_p$  の差( $V_b - V_p$ )に置き換える。

$$\varepsilon = \frac{V_b - V_p}{V_b} \quad \dots(6.2)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{V_p}{V_b} \quad \dots(6.3)$$

充填層体積  $V_b$  は、充填層の形状を円柱と仮定すると、充填層の断面積  $A$  [m<sup>2</sup>] と層高  $L$  [m] を用いて次式で表される。

$$V_b = AL \quad \dots(6.4)$$

粒子体積  $V_p$  は、粒子重量  $W_p$  [kg] と粒子密度  $\rho_p$  [kg/m<sup>3</sup>] を用いて次式で表される。

$$V_p = \frac{W_p}{\rho_p} \quad \dots(6.5)$$

$V_b$  と  $V_p$  の式を  $\varepsilon$  の式に代入すると、計算しやすい形での空隙率を得る。

$$\varepsilon = 1 - \frac{W_p}{\rho_p AL} \quad \dots(6.6)$$

## 7. 自由沈降

粒子径  $x$  [m]、密度  $\rho_p$  [kg/m<sup>3</sup>] の球形単一粒子が粘度  $\mu$  [Pa·s]、密度  $\rho_f$  [kg/m<sup>3</sup>] の静止している液体中を沈降速度  $u$  [m/s] で自由沈降(free settling)するとき、沈降粒子の運動方程式は次式で表される。

$$\frac{\pi}{6} x^3 \rho_p \frac{du}{dt} = \frac{\pi}{6} x^3 \rho_p g - \frac{\pi}{6} x^3 \rho_f g - C_D \left( \frac{\pi x^2}{4} \right) \left( \frac{\rho_f u^2}{2} \right) \quad \dots(7.1)$$

ただし、 $t$  は沈降時間[s]、 $C_D$  は抵抗係数[-]、 $g$  は重力加速度[m/s<sup>2</sup>]。

上式の左辺は慣性力、右辺は左から順に重力、浮力、抵抗力である。慣性

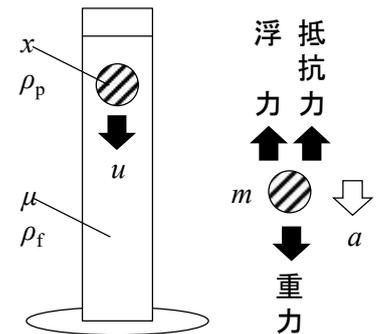
力は、粒子重量と加速度の積で表される( $F=ma$ )。浮力は、粒子が液体の中に入ることによってかさが増す分の液重量が沈降粒子に対して垂直上向きに作用する。抵抗力は、投影面積(粒子の大きさに相当)と運動エネルギー(沈降速度に相当)に比例し、沈降粒子に対して垂直上向きに作用する。抵抗力がこれらの物理量に比例することは、自分が沈降粒子になったとして想像してみると、理解できるであろう。なお、運動エネルギー項の速度  $u$  は相対速度であり、流体が動いている場合は、補正が必要となる。比例定数である抵抗係数(drag coefficient) $C_D$  [-]を用いることで、比例式を等式で表すことができる。抵抗係数は、粒子レイノルズ数  $Re_p$  [-] の関数であり、次式のように場合分けされる。

(a) Stokes 域( $Re_p < 2$ )のとき  $C_D = \frac{24}{Re_p} \quad \dots(7.2)$

(b) Allen 域( $2 < Re_p < 500$ )のとき  $C_D = \frac{10}{\sqrt{Re_p}} \quad \dots(7.3)$

(c) Newton 域( $500 < Re_p$ )のとき  $C_D = 0.44 \quad \dots(7.4)$

粒子レイノルズ数  $Re_p$  [-] は、粒子周りの流体の慣性力  $ma$  と粒子周りの流体の粘性力  $\tau A$  の比  $ma/\tau A$  で定義される。慣性力  $ma = \rho_f V (du/dt) \propto \rho_f x^3 (u/(x/u)) = \rho_f x^2 u^2$ 、粘性力  $\tau A \propto \mu (u/x) x^2 = \mu u x$  であることから、粒子レイ



ノルズ数  $Re_p[-]$  は、次式で表される。

$$Re_p = \frac{xu\rho_f}{\mu} \quad \dots(7.5)$$

沈降粒子が等速度運動する場合、運動方程式の加速度を 0 とおき、沈降速度  $u$  を終末速度  $u_t$  に置き換える。さらに、抵抗係数  $C_D$  の式を運動方程式に代入して式中の  $u_t$  について整理すると、それぞれの沈降領域における終末速度(terminal velocity)が導かれる。

沈降領域が Stokes 域の場合は、次式のように導かれる。

$$0 = \frac{\pi}{6}x^3\rho_p g - \frac{\pi}{6}x^3\rho_f g - \frac{24}{Re_p} \left( \frac{\pi x^2}{4} \right) \left( \frac{\rho_f u_t^2}{2} \right) \quad \dots(7.6)$$

$$0 = \frac{\pi g(\rho_p - \rho_f)x^3}{6} - \frac{24}{(xu_t\rho_f/\mu)} \left( \frac{\pi x^2}{4} \right) \left( \frac{\rho_f u_t^2}{2} \right) \quad \dots(7.7)$$

$$0 = \frac{\pi g(\rho_p - \rho_f)x^3}{6} - 3\pi\mu x u_t \quad \dots(7.8)$$

$$\boxed{u_t = \frac{g(\rho_p - \rho_f)x^2}{18\mu}} \quad (\text{Stokes}) \quad \dots(7.9)$$

沈降領域が Allen 域の場合は、次式のように導かれる。

$$0 = \frac{\pi}{6}x^3\rho_p g - \frac{\pi}{6}x^3\rho_f g - \frac{10}{\sqrt{Re_p}} \left( \frac{\pi x^2}{4} \right) \left( \frac{\rho_f u_t^2}{2} \right) \quad \dots(7.10)$$

$$\frac{\pi g(\rho_p - \rho_f)x^3}{6} \sqrt{Re_p} = 10 \left( \frac{\pi x^2}{4} \right) \left( \frac{\rho_f u_t^2}{2} \right) \quad \dots(7.11)$$

$$\left[ \frac{\pi g(\rho_p - \rho_f)x^3}{6} \sqrt{Re_p} \right]^2 = \left[ 10 \left( \frac{\pi x^2}{4} \right) \left( \frac{\rho_f u_t^2}{2} \right) \right]^2 \quad \dots(7.12)$$

$$\frac{\pi^2 g^2 (\rho_p - \rho_f)^2 x^6}{36} \left( \frac{xu_t\rho_f}{\mu} \right) = 100 \left( \frac{\pi^2 x^4}{16} \right) \left( \frac{\rho_f^2 u_t^4}{4} \right) \quad \dots(7.13)$$

$$\frac{g^2 (\rho_p - \rho_f)^2 x^3}{36\mu} = 100 \left( \frac{1}{16} \right) \left( \frac{\rho_f u_t^3}{4} \right) \quad \dots(7.14)$$

$$\frac{16 \times 4}{36 \times 100} \frac{g^2 (\rho_p - \rho_f)^2 x^3}{\rho_f \mu} = u_t^3 \quad \dots(7.15)$$

$$u_t^3 = \frac{4}{225} \frac{g^2 (\rho_p - \rho_f)^2 x^3}{\rho_f \mu} \quad \dots(7.16)$$

$$\boxed{u_t = \left[ \frac{4}{225} \frac{g^2 (\rho_p - \rho_f)^2}{\rho_f \mu} \right]^{1/3} x} \quad (\text{Allen}) \quad \dots(7.17)$$

沈降領域が Newton 域の場合は、次式のように導かれる。

$$0 = \frac{\pi}{6} x^3 \rho_p g - \frac{\pi}{6} x^3 \rho_f g - 0.44 \left( \frac{\pi x^2}{4} \right) \left( \frac{\rho_f u_t^2}{2} \right) \quad \dots(7.18)$$

$$\frac{\pi g (\rho_p - \rho_f) x^3}{6} = \frac{0.44}{8} (\pi x^2) (\rho_f u_t^2) \quad \dots(7.19)$$

$$\frac{g (\rho_p - \rho_f) x}{6 \times 0.055} = \rho_f u_t^2 \quad \dots(7.20)$$

$$u_t^2 = \frac{g (\rho_p - \rho_f) x}{0.33 \rho_f} \quad \dots(7.21)$$

$$u_t^2 = \frac{g (\rho_p - \rho_f) x}{(1/3) \rho_f} \quad \dots(7.22)$$

$$u_t = \sqrt{\frac{3g(\rho_p - \rho_f)x}{\rho_f}} \quad (\text{Newton}) \quad \dots(7.23)$$

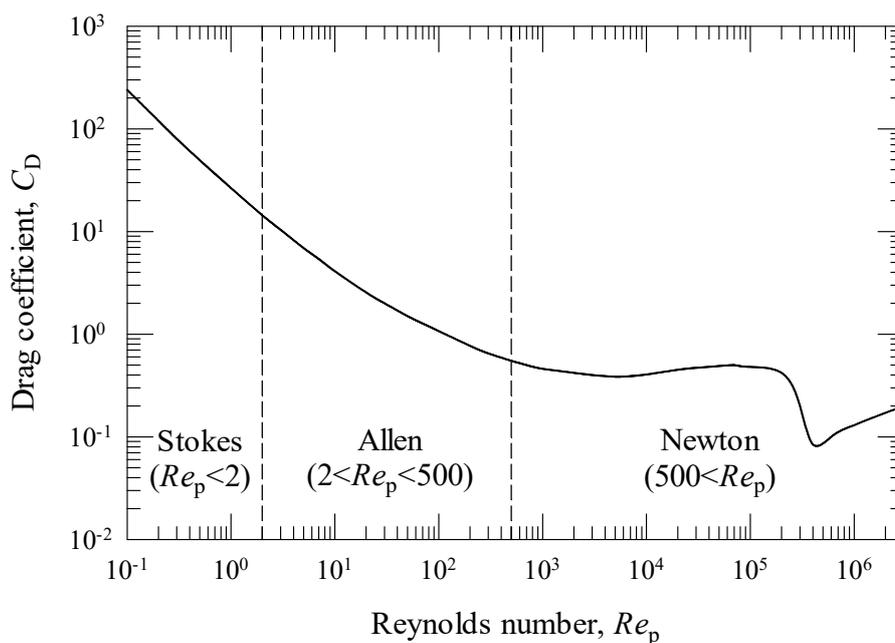


図 7.1 抵抗係数と粒子レイノルズ数の関係(球粒子の場合) [文献 8]

- ① 適当な沈降領域を仮定して終末速度を求める。(沈降粒子がナノ～マイクロン寸法であれば Stokes 域、ミリ寸法であれば Newton 域、それらの中間であれば Allen 域を仮定してみよ。)
- ② ①の結果をもとに粒子レイノルズ数を計算する。
- ③ ②の結果が適切な範囲に入っていれば計算終了、そうでなければ別の沈降領域を仮定して再計算する。

## 8. 透過流動

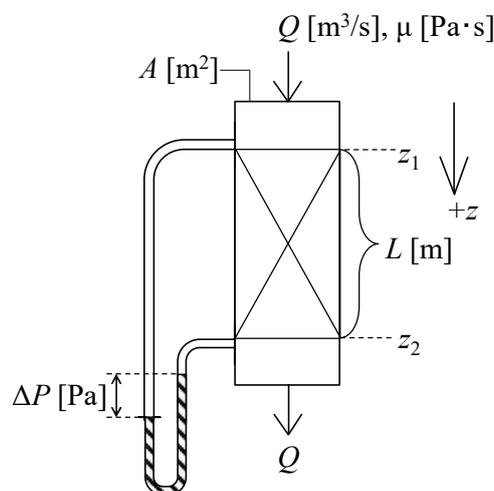
## 8. 1 ダルシーの式

粒子充填層に一定の流量で流体を流すと、マンオメーターの液位に差が生じて、この分だけ圧力損失を生じる。圧力損失  $\Delta p$  [Pa]は、流体が固定層内を流れる際の摩擦損失に相当し、流体の体積流量  $Q$  [m<sup>3</sup>/s]、流体粘度  $\mu$  [Pa·s]、層高  $L$  [m]に比例する。これらの関係式は、**ダルシーの式(Darcy's equation)**で表される。**[文献9]**

$$u = k_p \frac{\Delta p}{\mu L} \left( = \frac{Q}{A} \right) \quad \cdots(8.1.1)$$

ただし、 $k_p$ は**透過係数(permeability coefficient)**[m<sup>2</sup>]。

ダルシーの式は簡便だが、粒子充填層やそれを構成している固体粒子に関する粒子特性項が含まれない為、粒子充填層を変更するたびに透過係数  $k_p$ を実験的に求める必要がある。



## 8. 2 コゼニー・カルマンの式

粒子充填層内の流れは、みかけの直径  $d_c$  [m]、みかけの長さ  $L_c$  [m]の仮想的な直円管内流れとみなすことができる。このとき、粒子充填層内を流れるみかけの平均流速  $u_c$  [m/s]は、ハーゲン・ポアズイユの式を用いて次式で表される。

$$u_c = \frac{d_c^2 \Delta p}{32 \mu L_c} \quad \cdots(8.2.1)$$

$\mu$ は流体粘度[Pa·s]、 $\Delta p$ は圧力損失[Pa]。

粒子充填層内における仮想的な屈曲流路において、空隙率  $\varepsilon$  [–]は粒子充填層の全体積  $V_b$  [m<sup>3</sup>]に対する空隙体積  $V_{e0}$  [m<sup>3</sup>]の比で表される。

$$\varepsilon = \frac{V_{e0}}{V_b} \quad \cdots(8.2.2)$$

粒子充填層と空隙部の断面積をそれぞれ  $A$  および  $A_{e0}$  [m<sup>2</sup>]とすると、上式を用いて次式が成り立つ。

$$\varepsilon = \frac{A_{e0} L}{A L} = \frac{A_{e0}}{A} \quad \cdots(8.2.3)$$

ここで、空塔速度  $u$  [m/s]および屈曲流路内のみかけの平均流速  $u_{e0}$  [m/s]は、流体の体積流量  $Q$  [m<sup>3</sup>/s]を用いてそれぞれ次式で表される。

$$u = \frac{Q}{A} \quad \cdots(8.2.4)$$

$$u_{e0} = \frac{Q}{A_{e0}} \quad \cdots(8.2.5)$$

$u$  と  $u_{e0}$  の比をとって  $Q$  を消去したものを  $\varepsilon$  の式に代入し、 $A$  と  $A_{e0}$  を消去すると、次式のようになる。

$$\frac{u}{u_{e0}} = \frac{A_{e0}}{A} \quad \cdots(8.2.6)$$

$$\varepsilon = \frac{u}{u_{e0}} \quad \cdots(8.2.7)$$

$$u_{e0} = \frac{u}{\varepsilon} \quad \cdots(8.2.8)$$

粒子充填層内における流体の透過時間は、あらゆる流路モデルにおいて等しい。いま、仮想的な屈曲流路と延伸流路の透過時間を等置し、みかけの平均流速  $u_e$  [m/s] について整理すると、次式の通りとなる。

$$\frac{L}{u_{e0}} = \frac{L_e}{u_e} \quad \cdots(8.2.9)$$

$$u_e = u_{e0} \frac{L_e}{L} \quad \cdots(8.2.10)$$

$u_{e0}$  の式を上式に代入すると、次式を得る。

$$u_e = \frac{uL_e}{\varepsilon L} \quad \cdots(8.2.11)$$

みかけの円管径  $d_e$  [m] は、相当直径の式を次式の通りに変形して得る。

$$d_e = 4 \times \left( \frac{\text{流路断面積} \times \text{層高}}{\text{ぬれ辺長} \times \text{層高}} \right) = 4 \times \left( \frac{\text{流路体積}}{\text{ぬれ面積}} \right) = 4 \times \left( \frac{\text{空隙体積}}{\text{粒子全表面積}} \right) = 4 \times \left[ \frac{V_b \varepsilon}{S_V V_b (1 - \varepsilon)} \right] \quad \cdots(8.2.12)$$

$$d_e = \frac{4\varepsilon}{S_V (1 - \varepsilon)} \quad \cdots(8.2.13)$$

$S_V$  は体積基準の比表面積 [ $\text{m}^2/\text{m}^3$ ]、 $V_b$  は粒子充填層体積 [ $\text{m}^3$ ]。

$u_e$  の式と  $d_e$  の式をそれぞれハーゲン・ポアズイユの修正式に代入し、空塔速度  $u$  [m/s] あるいは層高あたりの圧力損失  $\Delta p/L$  [Pa/m] について整理すると、**コゼニー・カルマンの式(Kozeny-Carman's equation)**が導かれる。 **[文献 10-12]**

$$\frac{uL_e}{\varepsilon L} = \frac{1}{32} \left[ \frac{4\varepsilon}{S_V (1 - \varepsilon)} \right]^2 \frac{\Delta p}{\mu L_e} \quad \cdots(8.2.14)$$

$$u = \frac{\varepsilon}{32} \left( \frac{L}{L_e} \right) \left[ \frac{16\varepsilon^2}{S_V^2 (1 - \varepsilon)^2} \right] \frac{\Delta p}{\mu L_e} \quad \cdots(8.2.15)$$

$$u = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{L_e} \right) \left[ \frac{\varepsilon^3}{S_V^2 (1 - \varepsilon)^2} \right] \frac{\Delta p}{\mu L_e} \quad \cdots(8.2.16)$$

$$u = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{L_e} \right)^2 \left[ \frac{\varepsilon^3}{S_V^2 (1 - \varepsilon)^2} \right] \left( \frac{\Delta p}{\mu L_e} \right) \left( \frac{L_e}{L} \right) \quad \cdots(8.2.17)$$

$$u = \frac{1}{k} \left[ \frac{\varepsilon^3}{S_V^2 (1 - \varepsilon)^2} \right] \frac{\Delta p}{\mu L} \quad \cdots(8.2.18) \quad \text{ただし} \quad 1/k \equiv (1/2)(L/L_e)^2 \quad \cdots(8.2.19)$$

$$u = \left[ \frac{\varepsilon^3}{k S_V^2 (1 - \varepsilon)^2} \right] \frac{\Delta p}{\mu L} \quad \cdots(8.2.20)$$

$$\frac{\Delta p}{L} = k S_V^2 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \mu u \quad \dots(8.2.21)$$

$k$  はコゼニー定数(Kozeny's constant)[-]であり、経験的に  $k \approx 5$  とすることが知られている。[文献 10, 11]  
 ダルシーの式とコゼニー・カルマンの式を比較すると、粒子特性項を含む透過係数  $k_p$  [m<sup>2</sup>]が得られる。  
 このことから、コゼニー・カルマンの式がダルシーの式を修正した式になっていることが分かる。

$$k_p = \frac{\varepsilon^3}{5 S_V^2 (1-\varepsilon)^2} \quad \dots(8.2.22)$$

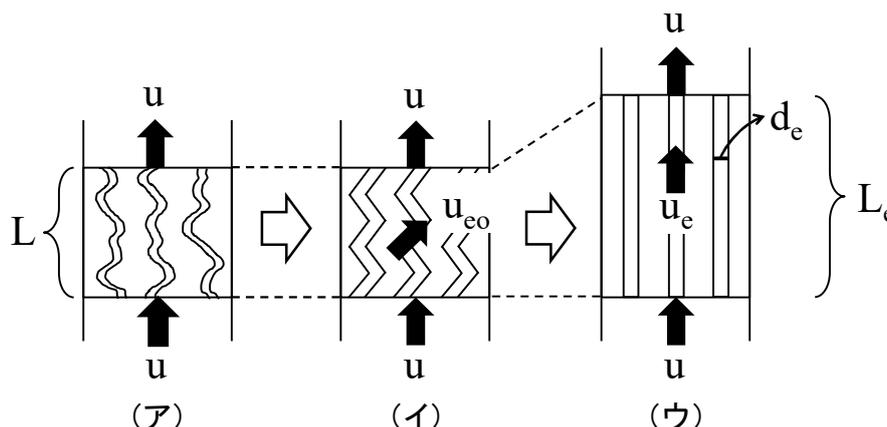


図 8.2.1 粒子充填層内の流動モデル [文献 10]

(ア) 実際の流路、(イ) 仮想的な屈曲流路、(ウ) 仮想的な延伸流路

### 参考文献

- [1] 椿淳一郎, 鈴木道隆, 神田良照; 入門 粒子・粉体工学 改訂 2 版, 日刊工業新聞社(2016), p.6
- [2] 粉体工学研究会編; 粉体粒度測定法, 養賢堂(1965), p.2
- [3] J.W. Mullin; Crystallization 4<sup>th</sup> Ed., Butterworth-Heinemann (2001), pp.78-85
- [4] 今木精康; 粉体工学演習, コロナ社(1987), p.12
- [5] 張興和; 平均の意味と正確な計算方法に関する浅見, 旭川大学経済学部紀要 **73**, (2014)1-14
- [6] 粉体工学会編; 粉体の基礎物性(粉体工学叢書 1), 日刊工業新聞社(2005), 1.2.1 章
- [7] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), p.104
- [8] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), p.293
- [9] H. Darcy; *Les Fontains Publiques de la Ville de Dijon* (1856)
- [10] J. Kozeny; *Sitzb. Akad. Wiss., Wien, Math.-naturw. Kl.* **136** (Abt, II a), 271-306 (1927)
- [11] J. Kozeny; *Z. Pfl.-Ernahr. Dung. Bodenk.* **28A**, 54-56 (1933)
- [12] P.C. Carman; *Trans. Inst. Chem. Eng.*, **15**, 150-166(1937)

令和 2(2020)年 4 月 9 日作成

令和 2(2020)年 4 月 15 日訂正

令和 2(2020)年 5 月 19 日訂正

令和 3(2021)年 9 月 3 日訂正