

## 粉体貯蔵

### 1. 粉体層の力学的特性

#### 1. 1 粉体層の摩擦特性

##### 1.1.1 摩擦角

流体のようにサラサラと流れる粉体は扱いやすい。一般に、粒子径が大きく球状の粉体粒子は、流動性が良好である。いま、粉体ろうとから試料粉体を排出させて平板上に粉体を堆積させる(注入法)。このとき、平板と粉体斜面のなす角 $\phi$ を安息角といい、安息角が小さいほど粉体流動性が良好である。理論的な安息角 $\phi$ は、粉体斜面上にある粉体粒子1個(重量 $W_p$  [N])に対する力のつり合いより導かれる。

$$(斜面に対して垂直方向) W_p \cos \phi = N \quad \cdots(1.1.1)$$

$$(斜面に対して水平方向) W_p \sin \phi = \mu N \quad \cdots(1.1.2)$$

$$W_p \cos \phi = \mu W_p \cos \phi \quad \cdots(1.1.3)$$

$$\phi = \tan^{-1} \mu \quad \cdots(1.1.4)$$

ただし、 $N$ は垂直抗力[N]、 $\mu$ は摩擦係数[-]。

安息角は摩擦角の一種であり、上式は摩擦角の定義式にもなっている。ここでの摩擦角は、粉体がまさに動き出そうとする限界状態の角度をいう。摩擦係数は、粉体の動き出しにくさを表す。摩擦角は、安息角のほかにも粉体層内部の摩擦係数で定義される内部摩擦角 $\phi_i$ 、粉体-壁面間の摩擦係数で定義される壁摩擦角 $\phi_w$ などがある。

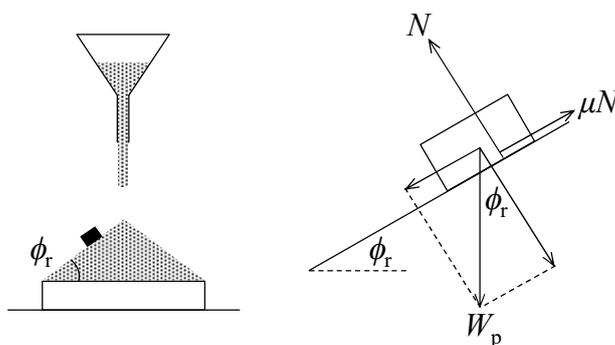


図 1.1.1.1 摩擦角(安息角)の定義

#### 【計算例】摩擦係数

ある粉体試料の安息角は $27^\circ$ であった。この粉体試料の摩擦係数 $\mu$ を求めよ。(0.510)

$$\mu = \tan \phi = \tan 27^\circ = 0.50952 \doteq \boxed{0.510}$$

#### 【問題】摩擦係数

ある粉体試料の安息角は $32^\circ$ であった。この粉体試料の摩擦係数 $\mu$ を求めよ。(0.625)

### 1.1.2 クーロン粉体

上箱と床面に固定した下箱からなる容器(断面積  $A$  [ $\text{m}^2$ ])に試料粉体を入れて粉体層を形成し、上箱の蓋におもりをのせて粉体層に垂直荷重  $P$  [N]を作用させる。ここに水平方向の力を上箱に加えて粉体層にせん断荷重  $S$  [N]を作用させる(一面せん断試験)。このとき、粉体層は下箱底面から垂直反力  $R_p$  [N]を、下箱側面から水平反力  $R_s$  [N]をそれぞれ受けており、垂直荷重・せん断荷重とつり合っている。粉体層の内部では、これらの外力に抗うようにして垂直応力  $\sigma$  [Pa]( $=P/A$ )とせん断応力  $\tau$  [Pa]( $=S/A$ )が作用する。このときのせん断応力をせん断抵抗という。せん断荷重を大きくしてゆき、やがて粉体層内部のせん断抵抗がある値を越えると、すべり面  $XX'$ に沿って粉体層が動き出す。これを粉体層の崩壊という。応力限界時のせん断抵抗をせん断強さといい、粉体層の強度を表す。おもりを変更して同様の試験を行い、垂直荷重とせん断強さの関係を図上に整理して得られる近似曲線を破壊包絡線という。このとき、直線性を示す粉体をクーロン粉体といい、次のクーロンの式で表される。

$$\tau = \sigma \tan \phi + C = \mu_i \sigma + C \quad [\mu_i = \tan \phi] \quad \cdots(1.1.2.1)$$

ただし、 $C$  は付着力[Pa]、 $\phi$  は内部摩擦角[deg.]、 $\sigma$  は垂直応力[Pa]、 $\tau$  はせん断強さ[Pa]、 $\mu_i$  は内部摩擦係数[-]。  $C$ 、 $\phi$ 、 $\mu_i$  は摩擦特性因子であり、粉体の種類や粉体層の性状に依存する。

下箱を取り去りすべり面  $XX'$ を壁面と接触させて同様の整理を行うと、壁面に対する摩擦特性因子が得られる。

$$\tau = \sigma \tan \phi_w + C_w = \mu_w \sigma + C_w \quad [\mu_w = \tan \phi_w] \quad \cdots(1.1.2.2)$$

ただし、 $C_w$  は壁面付着力[Pa]、 $\phi_w$  は壁摩擦角[deg.]、 $\mu_w$  は壁摩擦係数[-]。

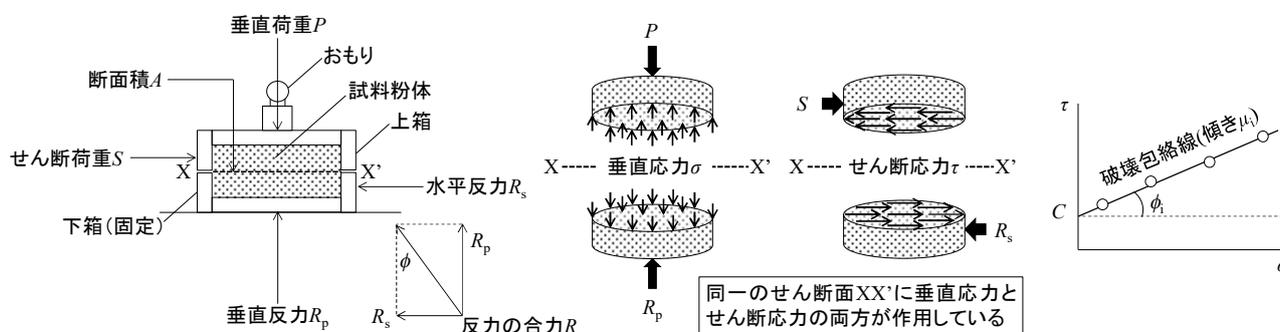


図 1.1.2.1 一面せん断試験による内部摩擦特性の解析 [文献 1]

#### 【計算例】粉体層強度

ある粉体の一面せん断試験を行ったところ、せん断強さ  $\tau$  [kPa]と鉛直応力  $\sigma$  [kPa]の関係式  $\tau = 0.535\sigma + 10.5$  を得た。この粉体層の内部摩擦角  $\phi$  を求めよ。また、鉛直応力  $\sigma = 120$  kPa、せん断応力  $\tau = 50$  kPa がこの粉体層に作用しているとき、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。(28.1°)

$$\phi = \tan^{-1} \mu_i = \tan^{-1} 0.535 = 28.146^\circ \doteq 28.1^\circ$$

$$\tau = C + \sigma \tan \phi = 10.5 + 120 \tan 28.146^\circ = 74.697 \text{ kPa} > 50 \text{ kPa} \text{ (崩壊しない)}$$

**【問題】 粉体層強度**

- (1) ある粉体の一面せん断試験を行ったところ、せん断強さ  $\tau$  [kPa]と鉛直応力  $\sigma$  [kPa]の関係式  $\tau=0.420\sigma+5.10$  を得た。この粉体層の内部摩擦角  $\phi$  を求めよ。また、鉛直応力  $\sigma=100$  kPa、せん断応力  $\tau=60$  kPa がこの粉体層に作用しているとき、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。(22.8°)
- (2) ある粉体の一面せん断試験を行ったところ、せん断強さ  $\tau$  [kPa]と鉛直応力  $\sigma$  [kPa]の関係式  $\tau=0.570\sigma+3.50$  を得た。この粉体層の内部摩擦角  $\phi$  を求めよ。また、鉛直応力  $\sigma=150$  kPa、せん断応力  $\tau=75$  kPa がこの粉体層に作用しているとき、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。(29.7°)

**1. 2 粉体層内の応力状態**

**1.2.1 1方向から垂直応力が作用する場合**

直方体を仮定した粉体層の垂直面(断面積  $S_x$  [m<sup>2</sup>])に対して両側から垂直応力  $\sigma_x$  [Pa]が作用しているとき、粉体層内部のすべり面  $XX'$ (断面積  $S$  [m<sup>2</sup>])の両側には反力として応力  $\sigma'$  [Pa]が水平方向に作用しており、粉体層は動かない。このとき、垂直なすべり面に作用する応力  $\sigma'$  [Pa]は、水平方向の力のつり合い ( $\sigma' S = \sigma_x S_x$ ,  $S = S_x$ )より  $\sigma_x$  [Pa]に等しい。すべり面が垂直方向に対して角度  $\theta$  だけ傾斜している場合であっても、すべり面の両側には反力として応力  $\sigma'$  [Pa]が水平方向に作用する。ただし、すべり面の断面積  $S$  は、垂直時の  $S_x$  よりも  $1/\cos\theta$  倍だけ大きくなる ( $S = S_x / \cos\theta$ )。このため、傾斜したすべり面に作用する応力  $\sigma'$  [Pa]は、水平方向の力のつり合い ( $\sigma' S = \sigma_x S_x$ ,  $S = S_x / \cos\theta$ )より  $\sigma_x$  の  $\cos\theta$  倍だけ小さくなる ( $\sigma' = \sigma_x \cos\theta$ )。

傾斜したすべり面に作用する応力  $\sigma'$  [Pa]は、すべり面に対して垂直な垂直応力  $\sigma$  [Pa] ( $=\sigma' \cos\theta = \sigma_x \cos^2\theta$ ) と水平なせん断応力  $\tau$  [Pa] ( $=\sigma' \sin\theta = \sigma_x \cos\theta \sin\theta$ )に分けて解析する。このとき、すべり面が垂直( $\theta=0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ )または水平( $\theta=90^\circ, 270^\circ$ )のときにせん断応力  $\tau$  が 0 になる。このような垂直応力  $\sigma$  を主応力といい、主応力が作用するすべり面を主応力面という。最大主応力  $\sigma_1$  [Pa] ( $=\sigma_x$ )を与える最大主応力面( $\theta=0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ )と最小主応力  $\sigma_3$  [Pa] ( $=0$ )を与える最小主応力面( $\theta=90^\circ, 270^\circ$ )は、互いに直交する。せん断応力  $\tau$  の大きさは、最大主応力面に対して  $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$  傾斜したすべり面に対して作用するとき最大となる ( $\theta=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ )。このように、粉体層の内部で作用する各応力の大きさは、すべり面の角度によって変化する。なお、水中で作用する応力は、同じ水深であれば、すべり面の角度によらず一様である。上式の  $\sigma$  と  $\tau$  の関係は、 $\sigma$ - $\tau$  座標平面上では円で表される。これをモールの応力円という。モール円を描くことで、垂直方向に対して角度  $\theta$  だけ傾斜したすべり面に作用する  $\sigma$  と  $\tau$  を図上で読み取ることができる。ただし、 $x$ - $y$  座標平面上で定義された傾斜角  $\theta$  は、 $\sigma$ - $\tau$  座標平面上では  $2\theta$  で表されることに留意する。

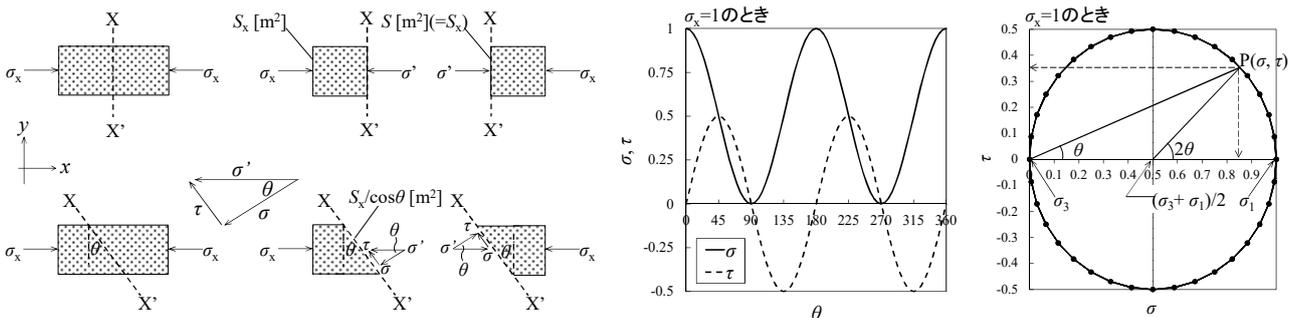


図 1.2.1.1 粉体層内の応力状態(1方向から垂直応力が作用する場合)

### 1.2.2 2方向から垂直応力が作用する場合

直方体を仮定した粉体層の垂直面に対して最大主応力  $\sigma_1$  [Pa]、水平面に対して最小主応力  $\sigma_3$  [Pa]が作用する場合を考える。最大主応力面から角度  $\theta$  だけ傾いた粉体層内のすべり面  $XX'$  (断面積  $S$  [m<sup>2</sup>])に対して作用する垂直応力  $\sigma$  [Pa]とせん断応力  $\tau$  [Pa]は、厚みのある微小な直角三角形  $OXX'$  に対する  $x$  方向と  $y$  方向の力のつり合いより導かれる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_1 S \cos \theta = \sigma S \cos \theta + \tau S \sin \theta \quad \cdots(1.2.2.1)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_3 S \sin \theta = \sigma S \sin \theta - \tau S \cos \theta \quad \cdots(1.2.2.2)$$

$x$  方向のつり合い式の両辺に  $\cos \theta$  を乗じる。また、 $y$  方向のつり合い式の両辺に  $\sin \theta$  を乗じる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_1 \cos^2 \theta = \sigma \cos^2 \theta + \tau \sin \theta \cos \theta \quad \cdots(1.2.2.3)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_3 \sin^2 \theta = \sigma \sin^2 \theta - \tau \cos \theta \sin \theta \quad \cdots(1.2.2.4)$$

上の2式を加えると、すべり面に作用する垂直応力  $\sigma$  [Pa]が導かれる。

$$\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta = \sigma (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad \cdots(1.2.2.5)$$

$$\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 (1 - \cos^2 \theta) = \sigma \quad [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \quad \cdots(1.2.2.6)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \theta + \sigma_3 = \sigma \quad \cdots(1.2.2.7)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(1 + \cos 2\theta)/2 + \sigma_3 = \sigma \quad [\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1] \quad \cdots(1.2.2.8)$$

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta / 2 \quad \cdots(1.2.2.9)$$

$x$  方向のつり合い式の両辺に  $\sin \theta$  を乗じる。 $y$  方向のつり合い式の両辺に  $\cos \theta$  を乗じる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_1 \cos \theta \sin \theta = \sigma \cos \theta \sin \theta + \tau \sin^2 \theta \quad \cdots(1.2.2.10)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_3 \sin \theta \cos \theta = \sigma \sin \theta \cos \theta - \tau \cos^2 \theta \quad \cdots(1.2.2.11)$$

上の2式を差し引くと、すべり面に作用するせん断応力  $\tau$  [Pa]が導かれる。

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \cos \theta \sin \theta = \tau (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad \cdots(1.2.2.12)$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta / 2 \quad [\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \quad \cdots(1.2.2.13)$$

$\sigma$  の式を変形する。

$$\sigma - (\sigma_1 + \sigma_3)/2 = (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta / 2 \quad \cdots(1.2.2.14)$$

$$[\sigma - (\sigma_1 + \sigma_3)/2]^2 = [(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta / 2]^2 \quad \cdots(1.2.2.15)$$

$\tau$  の式を変形する。

$$\tau^2 = [(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta / 2]^2 \quad \cdots(1.2.2.16)$$

上の2式を辺々加えると、モールの応力円が導かれる。

$$[\sigma - (\sigma_1 + \sigma_3)/2]^2 + \tau^2 = [(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta / 2]^2 + [(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta / 2]^2 \quad \cdots(1.2.2.17)$$

$$\boxed{[\sigma - (\sigma_1 + \sigma_3)/2]^2 + \tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 / 4} \quad [\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1] \quad \cdots(1.2.2.18)$$

上式は、中心  $((\sigma_1 + \sigma_3)/2, 0)$ 、半径  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  の円を表す。最大主応力面から角度  $\theta$  だけ傾いたすべり面  $XX'$  に作用するせん断応力  $\tau$  [Pa]を図上で読み取る。この値がクーロン式より求められるせん断強さ  $\tau$  [Pa]よりも小さければ、すべり面での粉体層の崩壊は起こらない。

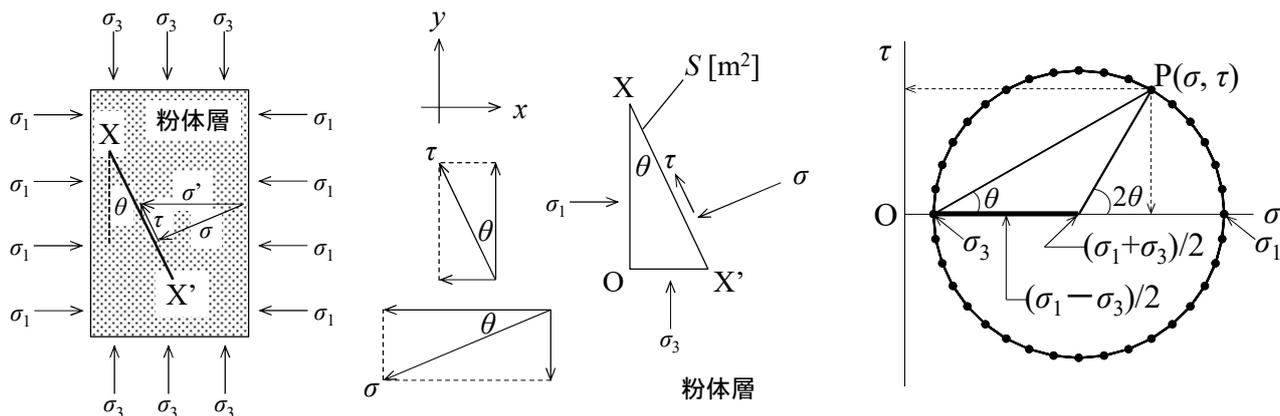


図 1.2.2.1 粉体層内の応力状態(2方向から垂直応力が作用する場合)

**【計算例】粉体層内の応力状態**

付着力 5.20 kPa、内部摩擦角 25°の粉体層に最大主応力  $\sigma_1=400$  kPa、最小主応力  $\sigma_3=100$  kPa が作用している。最大主応力面から角度  $\theta=30^\circ$ の面上に作用する①鉛直応力  $\sigma$  [kPa]および②せん断応力  $\tau$  [kPa]を求めよ。また、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。ただし、粉体層の垂直面に対して最大主応力、水平面に対して最小主応力が作用するものとし、クーロン粉体を仮定する。(①325 kPa, ②130 kPa)

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 + (\sigma_1 - \sigma_3)(\cos 2\theta)/2 = (400 + 100)/2 + (400 - 100)(\cos 60^\circ)/2 = \boxed{325 \text{ kPa}}$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)(\sin 2\theta)/2 = (400 - 100)(\sin 60^\circ)/2 = 129.90 \text{ kPa} \doteq \boxed{130 \text{ kPa}}$$

$$\tau = C + \sigma \tan \phi = 5.20 + 325 \tan 25^\circ = 156.74 \text{ kPa} > 130 \text{ kPa} \text{ (崩壊しない)}$$

**【問題】粉体層内の応力状態**

- (1) 付着力 5.20 kPa、内部摩擦角 25°の粉体層に最大主応力  $\sigma_1=400$  kPa、最小主応力  $\sigma_3=100$  kPa が作用している。最大主応力面から角度  $\theta=45^\circ$ の面上に作用する①鉛直応力  $\sigma$  [kPa]および②せん断応力  $\tau$  [kPa]を求めよ。また、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。ただし、粉体層の垂直面に対して最大主応力、水平面に対して最小主応力が作用するものとし、クーロン粉体を仮定する。(①250 kPa, ②150 kPa)
- (2) 付着力 5.20 kPa、内部摩擦角 25°の粉体層に最大主応力  $\sigma_1=400$  kPa、最小主応力  $\sigma_3=20$  kPa が作用している。最大主応力面から角度  $\theta=30^\circ$ の面上に作用する①鉛直応力  $\sigma$  [kPa]および②せん断応力  $\tau$  [kPa]を求めよ。また、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。ただし、粉体層の垂直面に対して最大主応力、水平面に対して最小主応力が作用するものとし、クーロン粉体を仮定する。(①305 kPa, ②164 kPa)

1.2.3 2方向から垂直応力とせん断応力が作用する場合

直方体を仮定した粉体層の垂直面に対して垂直応力  $\sigma_x$  [Pa]とせん断応力  $\tau_{xy}$  [Pa]、水平面に対して垂直応力  $\sigma_y$  [Pa]とせん断応力  $\tau_{yx}$  [Pa]が作用する場合を考える。この場合、主応力の向きは垂直または水平ではなくなる。粉体層の垂直面から角度  $\theta$ だけ傾いた粉体層内のすべり面  $XX'$  (断面積  $S$  [m<sup>2</sup>])に対して作用

する垂直応力  $\sigma$  [Pa]とせん断応力  $\tau$  [Pa]は、厚みのある微小な直角三角形 OXX'に対する  $x$  方向と  $y$  方向の力のつり合いより導かれる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_x \cos\theta + \tau_{yx} \sin\theta = \sigma \cos\theta + \tau \sin\theta \quad \cdots(1.2.3.1)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_y \sin\theta + \tau_{xy} \cos\theta = \sigma \sin\theta - \tau \cos\theta \quad \cdots(1.2.3.2)$$

粉体層の回転が起こらない場合、せん断応力  $\tau_{yx}$  と  $\tau_{xy}$  の大きさは互いに等しい( $\tau_{yx}=\tau_{xy}$ )。

$x$  方向のつり合い式の両辺に  $\cos\theta$  を乗じる。また、 $y$  方向のつり合い式の両辺に  $\sin\theta$  を乗じる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_x \cos^2\theta + \tau_{xy} \sin\theta \cos\theta = \sigma \cos^2\theta + \tau \sin\theta \cos\theta \quad \cdots(1.2.3.3)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy} \cos\theta \sin\theta = \sigma \sin^2\theta - \tau \cos\theta \sin\theta \quad \cdots(1.2.3.4)$$

上の 2 式を加えると、すべり面に作用する垂直応力  $\sigma$  [Pa]が導かれる。

$$\sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta = \sigma (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \quad \cdots(1.2.3.5)$$

$$\sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y (1 - \cos^2\theta) + \tau_{xy} \sin 2\theta = \sigma \quad [\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta, \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1] \quad \cdots(1.2.3.6)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y) \cos^2\theta + \sigma_y + \tau_{xy} \sin 2\theta = \sigma \quad \cdots(1.2.3.7)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)(1 + \cos 2\theta)/2 + \sigma_y + \tau_{xy} \sin 2\theta = \sigma \quad [\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1] \quad \cdots(1.2.3.8)$$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta / 2 + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \cdots(1.2.3.9)$$

$x$  方向のつり合い式の両辺に  $\sin\theta$  を乗じる。 $y$  方向のつり合い式の両辺に  $\cos\theta$  を乗じる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_x \cos\theta \sin\theta + \tau_{xy} \sin^2\theta = \sigma \cos\theta \sin\theta + \tau \sin^2\theta \quad [\tau_{yx}=\tau_{xy}] \quad \cdots(1.2.3.10)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_y \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} \cos^2\theta = \sigma \sin\theta \cos\theta - \tau \cos^2\theta \quad \cdots(1.2.3.11)$$

上の 2 式を差し引くと、すべり面に作用するせん断応力  $\tau$  [Pa]が導かれる。

$$(\sigma_x - \sigma_y) \cos\theta \sin\theta + (\sin^2\theta - \cos^2\theta) \tau_{xy} = \tau (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \quad \cdots(1.2.3.12)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y) (\sin 2\theta) / 2 + (1 - 2\cos^2\theta) \tau_{xy} = \tau \quad [\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta, \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1] \quad \cdots(1.2.3.13)$$

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta / 2 - \tau_{xy} \cos 2\theta \quad [\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1] \quad \cdots(1.2.3.14)$$

$\sigma$  の式を変形する。

$$\sigma - (\sigma_x + \sigma_y) / 2 = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta / 2 + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \cdots(1.2.3.15)$$

$$[\sigma - (\sigma_x + \sigma_y) / 2]^2 = [(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta / 2 + \tau_{xy} \sin 2\theta]^2 \quad \cdots(1.2.3.16)$$

$\tau$  の式を変形する。

$$\tau^2 = [(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta / 2 - \tau_{xy} \cos 2\theta]^2 \quad \cdots(1.2.3.17)$$

上の 2 式を辺々加えると、モールの応力円が導かれる。

$$[\sigma - (\sigma_x + \sigma_y) / 2]^2 + \tau^2 = [(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta / 2 + \tau_{xy} \sin 2\theta]^2 + [(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta / 2 - \tau_{xy} \cos 2\theta]^2 \quad \cdots(1.2.3.18)$$

$$[\sigma - (\sigma_x + \sigma_y) / 2]^2 + \tau^2 = [(\sigma_x - \sigma_y) / 2]^2 \cos^2 2\theta + (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta (\tau_{xy} \sin 2\theta) + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta + [(\sigma_x - \sigma_y) / 2]^2 \sin^2 2\theta - (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta (\tau_{xy} \cos 2\theta) + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta \quad \cdots(1.2.3.19)$$

$$[\sigma - (\sigma_x + \sigma_y) / 2]^2 + \tau^2 = [(\sigma_x - \sigma_y) / 2]^2 (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) + \tau_{xy}^2 (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) \quad \cdots(1.2.3.20)$$

$$\boxed{[\sigma - (\sigma_x + \sigma_y) / 2]^2 + \tau^2 = [(\sigma_x - \sigma_y) / 2]^2 + \tau_{xy}^2} \quad [\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1] \quad \cdots(1.2.3.21)$$

上式は、中心  $((\sigma_x + \sigma_y) / 2, 0)$ 、半径  $[(\sigma_x - \sigma_y)^2 / 4 + \tau_{xy}^2]^{0.5}$  の円を表す。この円は、粉体層の垂直面から角度  $\theta$  だけ傾いたすべり面 XX' に作用するせん断応力  $\tau$  [Pa]を図上で与える。 $x$ - $y$  座標平面上における最大主応力と粉体層の水平面のなす角度  $\Psi$  を求める。垂直応力  $\sigma$  は角度  $\Psi$  で極値をとり、最大または最小の主応力となる。

$$d\sigma/d\theta = d[(\sigma_x + \sigma_y) / 2 + (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\Psi / 2 + \tau_{xy} \sin 2\Psi] / d\theta = 0 \quad \cdots(1.2.3.22)$$

$$-(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\Psi + 2\tau_{xy} \cos 2\Psi = 0 \quad \cdots(1.2.3.23)$$

$$\tan 2\Psi = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y) \quad \cdots(1.2.3.24)$$

$$\Psi = (1/2)\tan^{-1}[2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)] \quad \cdots(1.2.3.25)$$

$\sigma$  の式に代入して  $\tau_{xy}$  を消去すると、最大主応力  $\sigma_1$  [Pa] と最小主応力  $\sigma_3$  [Pa] が導かれる。

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + [(\sigma_x - \sigma_y)/2]\cos 2\Psi + [(\sigma_x - \sigma_y)/2]\tan 2\Psi \sin 2\Psi \quad \cdots(1.2.3.26)$$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + [(\sigma_x - \sigma_y)/2]\cos 2\Psi + [(\sigma_x - \sigma_y)/2]\sin^2 2\Psi / \cos 2\Psi \quad \cdots(1.2.3.27)$$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + [(\sigma_x - \sigma_y)/2][(\cos^2 2\Psi + \sin^2 2\Psi) / \cos 2\Psi] \quad \cdots(1.2.3.28)$$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + [(\sigma_x - \sigma_y)/2](1 / \cos 2\Psi) \quad [\sin^2 2\Psi + \cos^2 2\Psi = 1] \quad \cdots(1.2.3.29)$$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \pm [(\sigma_x - \sigma_y)/2](1 + \tan^2 2\Psi)^{1/2} \quad [1 + \tan^2 2\Psi = 1 / \cos^2 2\Psi] \quad \cdots(1.2.3.30)$$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \pm [(\sigma_x - \sigma_y)/2][1 + 4\tau_{xy}^2 / (\sigma_x - \sigma_y)^2]^{1/2} \quad [\tan 2\Psi = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y)] \quad \cdots(1.2.3.31)$$

$$\sigma_1 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + [(\sigma_x - \sigma_y)/2][1 + 4\tau_{xy}^2 / (\sigma_x - \sigma_y)^2]^{1/2} \quad \cdots(1.2.3.32)$$

$$\sigma_3 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 - [(\sigma_x - \sigma_y)/2][1 + 4\tau_{xy}^2 / (\sigma_x - \sigma_y)^2]^{1/2} \quad \cdots(1.2.3.33)$$

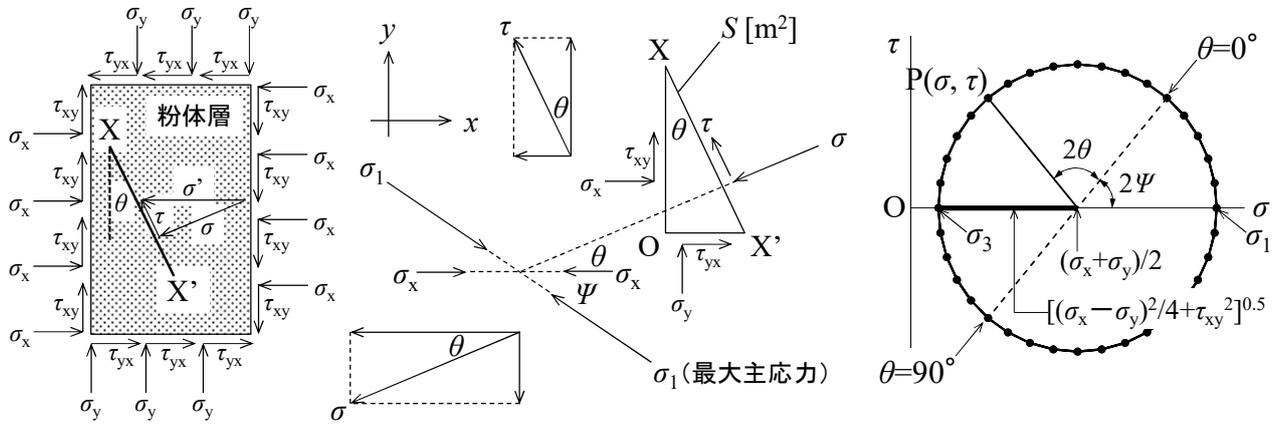


図 1.2.3.1 粉体層内の応力状態(2方向から垂直応力とせん断応力が作用する場合)

### 1.2.4 応力限界

粉体層の限界状態には、圧縮荷重が水平方向に作用して粉体層が斜め上方へ押し上げられようとする受動状態と、粉体層が水平方向に延伸されて自重のために崩壊しようとする主動状態の二つがある。前者の場合、最大主応力は水平方向、最小主応力は垂直方向となる。後者の場合、最大主応力は垂直方向、最小主応力は水平方向となる。以下、主動状態の粉体層に作用する主応力(粉体圧)の比と粉体層の摩擦角  $\phi$  の関係を導く。水平方向に作用する最小主応力  $\sigma_3$  を一定にして垂直方向に作用する最大主応力  $\sigma_1$  を増加させてゆくと(三軸圧縮試験)、図上ではモール円の半径が大きくなり、破壊包絡線と接したところで粉体層の崩壊が起こる。破壊包絡線を外挿したときの  $\sigma$  軸との交点  $P(-\sigma_0, 0)$  と限界状態のモール円の中心  $Q$  とそこから破壊包絡線に向かって降ろした垂線の足  $R$  を結んでできる三角形  $PQR$  を考える。クーロン粉体のモール円の半径を表す線分  $QR$  の長さは、次式のように表される。

$$QR = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = [(\sigma_1 - \sigma_0) - (\sigma_3 - \sigma_0)]/2 \quad \cdots(1.2.4.1)$$

線分  $PQ$  の長さは、次式のように導かれる。

$$PQ = -\sigma_0 + \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 - \sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_0)/2 = [(\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_3 - \sigma_0)]/2 \quad \cdots(1.2.4.2)$$

線分  $QR$  と線分  $PQ$  の関係は、次式のように導かれる。

$$QR=PQ\sin\phi \quad \cdots(1.2.4.3)$$

$$[(\sigma_1-\sigma_0)-(\sigma_3-\sigma_0)]/2=[(\sigma_1-\sigma_0)+(\sigma_3-\sigma_0)]\sin\phi/2 \quad \cdots(1.2.4.4)$$

$$(\sigma_1-\sigma_0)-(\sigma_3-\sigma_0)=[(\sigma_1-\sigma_0)+(\sigma_3-\sigma_0)]\sin\phi \quad \cdots(1.2.4.5)$$

$$(\sigma_1-\sigma_0)(1-\sin\phi)=(\sigma_3-\sigma_0)(1+\sin\phi) \quad \cdots(1.2.4.6)$$

$$(\sigma_3-\sigma_0)/(\sigma_1-\sigma_0)=(1-\sin\phi)/(1+\sin\phi) \quad \cdots(1.2.4.7)$$

非付着性粉体( $C=0$ )の場合は、次式となる。

$$\sigma_3/\sigma_1=(1-\sin\phi)/(1+\sin\phi)(\equiv K_a) [\sigma_0=0] \quad \cdots(1.2.4.8)$$

$$K_a(=P_h/P_v)=(1-\sin\phi)/(1+\sin\phi) [\sigma_1=P_v, \sigma_3=P_h] \quad \cdots(1.2.4.9)$$

ただし、 $P_h$ は水平方向の粉体圧[Pa]、 $P_v$ は垂直方向の粉体圧[Pa]、 $K_a$ はランキン係数[-]。

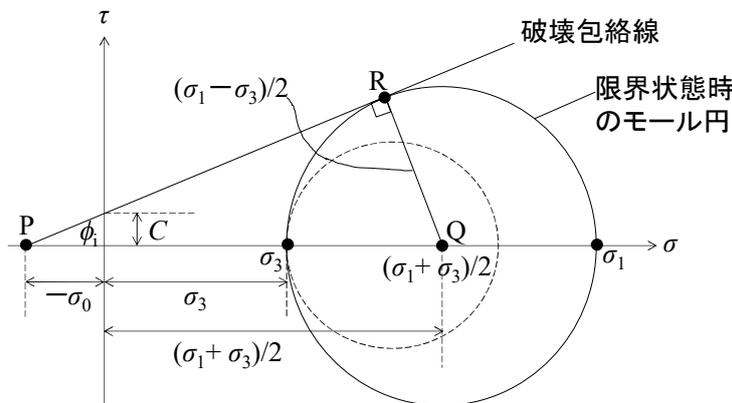


図 1.2.4.1 破壊包絡線とモール円の関係

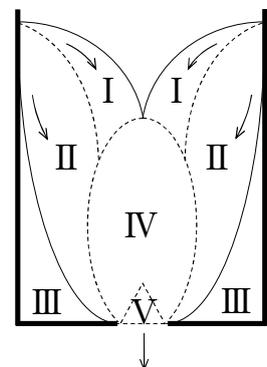
$\sigma_3$ を一定にして $\sigma_1$ を増大させてゆくと、モール円は破線から実線の方へと大きくなる。

破壊包絡線を接線とする円と $\sigma$ 軸との交点 $\sigma_1$ に達すると、粉体層の崩壊が起こる。

## 2. 粉粒体の流れ

### 2. 1 流出機構

平底容器の底面中心に設けた円形の排出口(オリフィス)からの粉体流出挙動を考える[文献 2]。領域Ⅰの粉体層は、領域Ⅱの粉体層の上を速やかにすべり落ちる。領域Ⅱの粉体層は、領域Ⅲの粉体層の上をゆるやかにすべり落ちる。領域Ⅲの粉体層は、静止している。領域ⅠとⅡの粉体層は、領域Ⅳへ供給される。領域Ⅳの粉体層は、下向きに速やかに流れ落ちる。領域Ⅴの粉体層は、自由落下の状態であらゆる穴から流出する。排出口の近傍では定常的にアーチ構造が形成される。すなわち、アーチを構成する粒子は下に落ちて、代わりに新しい粒子が上から落ちて補充される。このような準静的アーチを動的アーチといい、架橋を形成して閉塞の元となる静的アーチとは区別される。この動的アーチ構造のために上部の粉体圧が支えられるため、排出口からの粉体流出速度は層高に依存しない。



## 2. 2 流出速度

### 2.2.1 アーチ形状説[文献 3, 4]

アーチ形状を半円の円弧と仮定すると、アーチ形状は円の方程式を用いて表される。

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{D_0}{2}\right)^2 \quad \cdots(2.2.1.1)$$

$$y = \sqrt{(D_0/2)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - (x/a)^2} \quad [a \equiv D_0/2] \quad \cdots(2.2.1.2)$$

排出口 (直径  $D_0$  [m]) 内の  $x=x \sim x+dx$  で切り取られる幅  $dx$  の微小円環から排出される粉体の流出流量  $dQ$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]は、次式で表される。

$$dQ = (2\pi x dx)u \quad \cdots(2.2.1.3)$$

粉体流速  $u$  [ $\text{m}/\text{s}$ ]は、ベルヌーイの定理を用いる。

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad \cdots(2.2.1.4)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(h_1 - h_2) + \frac{u_1^2}{2} = \frac{u_2^2}{2} \quad \cdots(2.2.1.5)$$

$$0 + gy + 0 = \frac{u^2}{2} \quad \cdots(2.2.1.6)$$

$$u = \sqrt{2gy} \quad \cdots(2.2.1.7)$$

$dQ$  の式に代入して積分すると、排出口全体からの流出流量  $Q$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]が導かれる。

$$dQ = 2\pi x dx \sqrt{2gy} \quad \cdots(2.2.1.8)$$

$$dQ = 2\pi x dx \sqrt{2ga} \sqrt{1 - (x/a)^2} \quad \cdots(2.2.1.9)$$

$$dQ = (2\pi \sqrt{2ga}) x [1 - (x/a)^2]^{1/4} dx \quad \cdots(2.2.1.10)$$

$$Q = 2\pi \sqrt{2ga} \int_0^{D_0/2} x [1 - (x/a)^2]^{1/4} dx \quad \cdots(2.2.1.11)$$

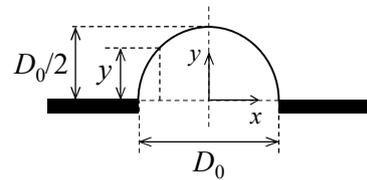
$$Q = 2\pi \sqrt{2ga} \int_0^a x [1 - (x/a)^2]^{1/4} dx \quad \cdots(2.2.1.12)$$

$$Q = 2\pi \sqrt{2ga} \int_0^1 at(1-t^2)^{1/4} (dx/dt) dt \quad [t \equiv x/a] \quad \cdots(2.2.1.13)$$

$$Q = 2\pi \sqrt{2ga} \int_0^1 at(1-t^2)^{1/4} a dt \quad \cdots(2.2.1.14)$$

$$Q = 2\pi \sqrt{2ga} a^{2.5} \int_0^1 t(1-t^2)^{1/4} dt \quad \cdots(2.2.1.15)$$

$$Q = 2\pi \sqrt{2ga} a^{2.5} \int_1^0 (\sqrt{1-X}) X^{1/4} (dt/dX) dX \quad \cdots(2.2.1.16)$$



$$Q = 2\pi\sqrt{2ga^{2.5}} \int_1^0 \sqrt{1-X} X^{1/4} \frac{dX}{-2\sqrt{1-X}} \quad [X \equiv 1-t^2] \quad \cdots(2.2.1.17)$$

$$Q = \pi\sqrt{2ga^{2.5}} \int_0^1 X^{1/4} dX \quad \cdots(2.2.1.18)$$

$$Q = \frac{4}{5}\pi\sqrt{2ga^{2.5}} \quad \cdots(2.2.1.19)$$

$$Q = \frac{4}{5}\pi\sqrt{2g} \left(\frac{D_0}{2}\right)^{2.5} \quad \cdots(2.2.1.20)$$

$$\boxed{Q \approx 1.97D_0^{2.5}} \quad \cdots(2.2.1.21)$$

粉体の場合は、上式のように層高には無関係であり、流出流量は排出口径の 2.5 乗に比例する。  
液体の場合は、次式のように液高の 0.5 乗に比例し、流出流量は排出口径の 2 乗に比例する。

$$Q = uS = \sqrt{2gh} \pi(D_0/2)^2 \approx 3.48h^{0.5} D_0^2 \quad \cdots(2.2.1.22)$$

本法で導かれた式は単純だが、アーチ形状を半円の円弧と仮定している点や粉体の性質に関する情報が式中に含まれない点で問題が残る。

## 2.2.2 粉体エネルギー説 [文献 5]

円形排出口 (直径  $D_0$ ) の近傍には自由落下アーチが形成される (曲率半径  $R_c$ )。このアーチより上方では原点に向かう流速  $u_p$  の直線的な流れが角度  $0 \sim 2\beta$  の範囲で放射状に広がる (曲率半径  $R$ )。自由落下アーチより下方では、排出口の両端で幅  $k/2$  ずつだけ狭められて縮流が形成され、自由落下の状態で鉛直下向きに流れる。

原点から  $R\cos\theta$  の高さにある微小体積  $dV$  の流動粉体のもつエネルギー  $E dV$  [J] は、圧力項を無視して次式で表される。

$$E dV = \rho_B dV g R \cos\theta + \frac{1}{2} \rho_B dV u_p^2 \quad \cdots(2.2.2.1)$$

$$E = \rho_B g R \cos\theta + \frac{1}{2} \rho_B u_p^2 \quad \cdots(2.2.2.2)$$

粉体の流下速度  $u_p$  [m/s] は断面積に反比例するので、適当な定数  $\lambda$  を用いて等式化する。

$$u_p \propto \frac{1}{\pi(R\cos\theta)^2} = \frac{\lambda}{\pi R^2 \cos^2\theta} \quad \cdots(2.2.2.3)$$

流下中の粉体のもつエネルギーは原点に近づくにつれて減少し、自由落下アーチの位置で最小となる。このときの臨界曲率半径  $R_c$  は、次式のように導かれる。

$$\frac{dE}{dR} = \frac{d}{dR} \left( \rho_B g R \cos\theta + \frac{1}{2} \rho_B u_p^2 \right) \quad \cdots(2.2.2.4)$$

$$\frac{dE}{dR} = \rho_B g \cos\theta + \frac{1}{2} \rho_B \frac{d}{dR} \left( \frac{\lambda}{\pi R^2 \cos^2\theta} \right)^2 \quad \cdots(2.2.2.5)$$

$$\frac{dE}{dR} = \rho_B g \cos \theta + \frac{1}{2} \rho_B \frac{d}{dR} \left( \frac{\lambda^2}{\pi^2 R^4 \cos^4 \theta} \right) \quad \cdots(2.2.2.6)$$

$$\frac{dE}{dR} = \rho_B g \cos \theta + \frac{\rho_B \lambda^2}{2\pi^2 \cos^4 \theta} \left( \frac{-4}{R^5} \right) \quad \cdots(2.2.2.7)$$

$$\frac{dE}{dR} = \rho_B g \cos \theta - \frac{2\rho_B \lambda^2}{\pi^2 R^5 \cos^4 \theta} \quad \cdots(2.2.2.8)$$

$$\rho_B g \cos \theta - \frac{2\rho_B \lambda^2}{\pi^2 R_c^5 \cos^4 \theta} = 0 \quad \cdots(2.2.2.9)$$

$$\pi^2 R_c^5 \cos^4 \theta = \frac{2\rho_B \lambda^2}{\rho_B g \cos \theta} \quad \cdots(2.2.2.10)$$

$$R_c = \left( \frac{2\lambda^2}{\pi^2 g \cos^5 \theta} \right)^{1/5} \quad \cdots(2.2.2.11)$$

最小曲率半径  $R_c$  は、次式によっても導かれる。

$$2R_c \sin \beta = D_0 - 2(k/2) \quad \cdots(2.2.2.12)$$

$$R_c = \frac{D_0 - k}{2 \sin \beta} \quad \cdots(2.2.2.13)$$

$R_c$  の式に代入して定数  $\lambda$  を求める。

$$\left( \frac{2\lambda^2}{\pi^2 g \cos^5 \theta} \right)^{1/5} = \frac{D_0 - k}{2 \sin \beta} \quad \cdots(2.2.2.14)$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 g}{2} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \beta} \frac{D_0 - k}{2} \right)^5 \quad \cdots(2.2.2.15)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 g}{(2^3)^2} \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \beta} (D_0 - k) \right]^{5/2}} \quad \cdots(2.2.2.16)$$

$$\lambda = \frac{\pi \sqrt{g}}{8} \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \beta} (D_0 - k) \right]^{5/2} \quad \cdots(2.2.2.17)$$

$u_p$  の式に代入すると、流動粉体の最小流下速度  $u_{pc}$  [m/s] が導かれる。

$$u_{pc} = \frac{\pi \sqrt{g}}{8} \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \beta} (D_0 - k) \right]^{5/2} \bigg/ \left[ \pi \left( \frac{D_0 - k}{2 \sin \beta} \right)^2 \cos^2 \theta \right] \quad \cdots(2.2.2.18)$$

$$u_{pc} = \left[ \frac{\pi \sqrt{g}}{8} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right)^{5/2} (D_0 - k)^{5/2} \right] \bigg/ \left[ \frac{\pi}{4} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right)^2 (D_0 - k)^2 \right] \quad \cdots(2.2.2.19)$$

$$u_{pc} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right)^{1/2} (D_0 - k)^{1/2} \sqrt{g} \quad \cdots(2.2.2.20)$$

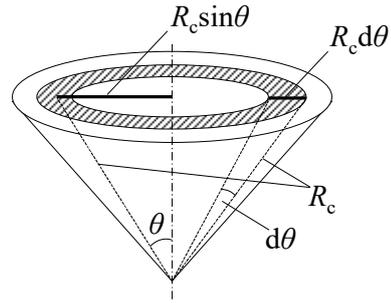
質量流出流量  $W$  [kg/s] は、幅  $R_c d\theta$  および周長  $2\pi R_c \sin \theta$  からなる微小円環 (断面積  $dS_c$ ) から排出する粉体の流出流量  $dQ$  [m<sup>3</sup>/s] を積分して導かれる。

$$W = \int \rho_B dQ \quad \dots(2.2.2.21)$$

$$W = \int \rho_B u_{pc} dS_c \quad \dots(2.2.2.22)$$

$$W = \int_0^\beta \rho_B u_{pc} (2\pi R_c \sin \theta) (R_c d\theta) \quad \dots(2.2.2.23)$$

$$W = \int_0^\beta 2\pi \rho_B u_{pc} R_c^2 \sin \theta d\theta \quad \dots(2.2.2.24)$$



$$W = \int_0^\beta 2\pi \rho_B \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right)^{1/2} (D_0 - k)^{1/2} \sqrt{g} \right] \left( \frac{D_0 - k}{2 \sin \beta} \right)^2 \sin \theta d\theta \quad \dots(2.2.2.25)$$

$$W = \int_0^\beta \frac{\pi \rho_B}{4} \left[ \frac{\cos^{1/2} \theta}{\sin^{5/2} \beta} \right] (D_0 - k)^{5/2} \sqrt{g} \sin \theta d\theta \quad \dots(2.2.2.26)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left( \frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \int_0^\beta \cos^{1/2} \theta \sin \theta d\theta \quad \dots(2.2.2.27)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left( \frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \int_1^{\cos^{1/2} \beta} t \sqrt{1-t^4} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) dt \quad [t \equiv \cos^{1/2} \theta] \quad \dots(2.2.2.28)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left( \frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \int_1^{\cos^{1/2} \beta} t \sqrt{1-t^4} \left( -\frac{2t}{\sqrt{1-t^4}} \right) dt \quad \dots(2.2.2.29)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left( \frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \int_1^{\cos^{1/2} \beta} (-2t^2) dt \quad \dots(2.2.2.30)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left( \frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \left[ -\frac{2}{3} t^3 \right]_1^{\cos^{1/2} \beta} \quad \dots(2.2.2.31)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{6} \left( \frac{1 - \cos^{3/2} \beta}{\sin^{5/2} \beta} \right) (D_0 - D_p)^{5/2} \quad [k \approx D_p] \quad \dots(2.2.2.32)$$

排出口のアーチ形状に着目して導かれた式と同様、流出流量は排出口径  $D_0$  の 2.5 乗に比例する。流れの縮小幅  $k$  は、粉体層の粒子径  $D_p$  程度であることが知られている [文献 6]。流出角  $\beta$  [deg.] は、粉体特性や容器形状に依存する。円錐状のホッパーから排出される場合は、内部摩擦角  $\phi$  [deg.] に対する次の相関式を用いる [文献 7]。

$$\beta = 50^\circ - (\phi/2) \quad \dots(2.2.2.33)$$

ホッパー角が分かっている場合は、ホッパーの半頂角  $\theta$  [deg.] を近似的に流出角と見なす ( $\beta \approx \theta$ ) [文献 8]。

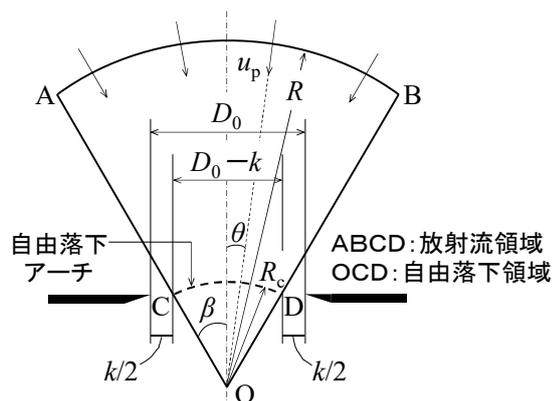


図 2. 2. 2. 1 円形排出口(オリフィス)からの粉体流出モデル [文献 5]

**【計算例】重力流動**

- (1) 平均粒子径 100  $\mu\text{m}$ 、かさ密度 800  $\text{kg/m}^3$ 、内部摩擦角  $27^\circ$ の粉体を 5.00 cm の小孔から流出させるときの流出速度  $W$  [ $\text{kg/s}$ ]を求めよ。(0.747  $\text{kg/s}$ )

$$\beta = 50^\circ - (\phi/2) = 50^\circ - (27^\circ/2) = 36.5^\circ$$

$$W = (\pi \rho_b g^{1/2} / 6) [(1 - \cos^3 \beta) / \sin^{5/2} \beta] (D_0 - D_p)^{5/2}$$

$$= [800\pi(9.81)^{1/2}/6] [(1 - \cos^3 36.5^\circ) / \sin^{5/2} 36.5^\circ] (5.00 \times 10^{-2} - 100 \times 10^{-6})^{5/2} = 0.74686 \text{ kg/s} \doteq \boxed{0.747 \text{ kg/s}}$$

- (2) 平均粒子径 500  $\mu\text{m}$ 、かさ密度 800  $\text{kg/m}^3$ 、内部摩擦角  $27^\circ$ の粉体を毎秒 1.00 kg 流出させるのに必要な流出口径  $D_0$  [ $\text{cm}$ ]を求めよ。(5.66 cm)

$$\beta = 50^\circ - (\phi/2) = 50^\circ - (27^\circ/2) = 36.5^\circ$$

$$D_0 = D_p + [W / \{(\pi \rho_b g^{1/2} / 6) \{ (1 - \cos^3 \beta) / \sin^{5/2} \beta \} \}]^{2/5}$$

$$= 500 \times 10^{-6} + [1.00 / \{ (800\pi(9.81)^{1/2} / 6) \{ (1 - \cos^3 36.5^\circ) / \sin^{5/2} 36.5^\circ \} \}]^{2/5} = 0.056579 \text{ m} \doteq \boxed{5.66 \text{ cm}}$$

**【問題】重力流動**

- (1) 平均粒子径 10.0  $\mu\text{m}$ 、かさ密度 800  $\text{kg/m}^3$ 、内部摩擦角  $27^\circ$ の粉体を 5.00 cm の小孔から流出させるときの流出速度  $W$  [ $\text{kg/s}$ ]を求めよ。(0.750  $\text{kg/s}$ )
- (2) 平均粒子径 5.00  $\mu\text{m}$ 、かさ密度 800  $\text{kg/m}^3$ 、内部摩擦角  $27^\circ$ の粉体を毎秒 1.00 kg 流出させるのに必要な流出口径  $D_0$  [ $\text{cm}$ ]を求めよ。(5.61 cm)

### 3. 粉体貯槽

気体・液体・粉粒体の貯蔵と排出を行う設備を貯槽という。ここでは粉粒体を対象とする。貯槽は、敷地面積の余裕が無い場合や貯蔵物を風雨から防ぐ点で有効だが、石炭や鉱石のように土地や天候の影響が問題にならない場合は、野積みや倉庫方式となる。貯槽の種類には、大量かつ長期間の貯蔵を目的とするサイロ、製造工程中における条件調整のため短期間の貯蔵を目的とするビン、粉体の定量的な供給を目的とするホッパーなどがある。サイロの種類には、ホッパー型(おもに金属製)、スカート型(おもにコンクリート製)、平底型があり、単槽または複数の単槽を連結した群槽として用いる。貯蔵物の自由表面からの深さ  $h$  と貯槽径  $D$  の比  $h/D$  が 1.5 以下のものを浅槽、それよりも大きいものを深槽という。

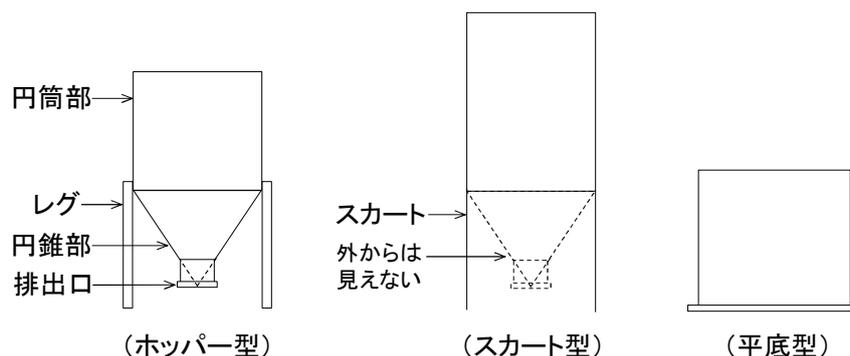


図 3.1 粉体貯槽の例

### 3. 1 寸法設計

#### 3.1.1 貯槽容積

貯槽容積  $V_T$  [m<sup>3</sup>]は、貯蔵物容積  $V_b$  と貯槽容積  $V_T$  の比  $V_b/V_T$  の目安が 0.85~0.95 であることから [文献 9]、次式で決定される。

$$V_T \approx 1.1V_b \quad \cdots(3.1.1.1)$$

貯蔵物容積  $V_b$  は、貯蔵物重量  $M$  [kg] とかさ密度  $\rho_b$  [kg/m<sup>3</sup>] の比で表される。

$$V_b = M/\rho_b \quad \cdots(3.1.1.2)$$

#### 3.1.2 貯槽径

円筒貯槽の槽径  $D$  [m] は、幾何学的な貯蔵物容積  $V_b$  [m<sup>3</sup>] の式より導かれる。貯蔵物の深さは、堆積面を水平にならした自由表面を基準に取る。

$$V_b = \pi R^2 H + (\pi R^2 L)/3 \quad \cdots(3.1.2.1)$$

$$V_b = (\pi D^2 H)/4 + (\pi D^2 L)/12 \quad [R=D/2] \quad \cdots(3.1.2.2)$$

$$V_b = (\pi D^2/4)[H+(L/3)] \quad \cdots(3.1.2.3)$$

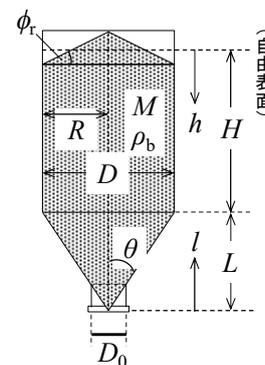
$$V_b = (\pi D^2/4)[H+(R/3)\cot\theta] \quad [\cot\theta=1/\tan\theta, \tan\theta=R/L] \quad \cdots(3.1.2.4)$$

$$V_b = (\pi D^2/4)[H+(D/6)\cot\theta] \quad \cdots(3.1.2.5)$$

$$V_b = (\pi D^3/4)[(H/D)+(1/6)\cot\theta] \quad \cdots(3.1.2.6)$$

$$D = [(4V_b/\pi)\{(H/D)+(1/6)\cot\theta\}^{-1}]^{1/3} \quad \cdots(3.1.2.7)$$

ただし、 $D$  は槽径[m]、 $D_0$  は排出口径[m]、 $H$  は円筒部深さ[m] (自由表面を基準に取る)、 $R$  は貯槽半径[m]、 $L$  は円錐部深さ[m]、 $V_T$  は貯槽容積[m<sup>3</sup>]、 $\theta$  は円錐排出部の半頂角[deg.]。



#### 3.1.3 貯槽形状 [文献 9]

①ホッパー型の場合 貯槽の建設費  $E$  [-] は、単位面積当たりの建設費を側壁部で 1、屋根部で  $i$ 、底板部で  $j$  として次式のように導かれる。

$$E = 2\pi R H + \pi R^2 i + \pi R (R^2 + L^2)^{1/2} j \quad \cdots(3.1.3.1)$$

$$E = \pi D H + (\pi D^2/4) i + (\pi D/2) [(D^2/4) + L^2]^{1/2} j \quad \cdots(3.1.3.2)$$

$$E=\pi DH+(\pi D^2/4)i+(\pi D^2/4)(1+4k^2)^{1/2}j \quad [L/D=k] \quad \cdots(3.1.3.3)$$

貯槽容積  $V_T$  の式を用いて  $H$  を消去する。

$$E=\pi D[\{4V_T/(\pi D^2)\}-\{4\pi kD^3/(12\pi D^2)\}]+(\pi D^2/4)i+(\pi D^2/4)(1+4k^2)^{1/2}j \quad [V_T=(\pi D^2H/4)+(\pi kD^3/12)] \quad \cdots(3.1.3.4)$$

$$E=\pi D[\{4V_T/(\pi D^2)\}-(kD/3)]+(\pi D^2/4)i+(\pi D^2/4)(1+4k^2)^{1/2}j \quad \cdots(3.1.3.5)$$

$$E=(4V_T/D)-(\pi kD^2/3)+(\pi D^2/4)i+(\pi D^2/4)(1+4k^2)^{1/2}j \quad \cdots(3.1.3.6)$$

上式の極小値を与える円筒部深さ－槽径比  $H/D$  を求める。

$$dE/dD=-\{4V_T/D^2\}-(2\pi kD/3)+(\pi D/2)i+(\pi D/2)(1+4k^2)^{1/2}j=0 \quad \cdots(3.1.3.7)$$

$$-4V_T-(2\pi kD^3/3)+(\pi D^3/2)i+(\pi D^3/2)(1+4k^2)^{1/2}j=0 \quad \cdots(3.1.3.8)$$

$$-4[(\pi D^3/4)(H/D)+(\pi kD^3/12)]-(2\pi kD^3/3)+(\pi D^3/2)i+(\pi D^3/2)(1+4k^2)^{1/2}j=0 \quad \cdots(3.1.3.9)$$

$$-(H/D)-k+(1/2)i+(1/2)(1+4k^2)^{1/2}j=0 \quad \cdots(3.1.3.10)$$

$$\boxed{H/D=[i+(1+4k^2)^{1/2}j-2k]/2} \quad \cdots(3.1.3.11)$$

$i=j=k=1$  のとき、円錐部深さ－槽径比  $L/D$  は1、円筒部深さ－槽径比  $H/D$  は約0.62となる。これらがホッパー型の経済的な貯槽形状となる。なお、円筒部深さは近似的に自由表面からの深さに等しいものと仮定した。

②スカート型の場合 貯槽の建設費  $E$  [-]は、単位面積当たりの建設費を側壁部で1、屋根部で  $i$ 、底板部で  $j$  として次式のように導かれる。

$$E=2\pi R(L+H)+\pi R^2i+\pi R(R^2+L^2)^{1/2}j \quad \cdots(3.1.3.12)$$

$$E=\pi DL+\pi DH+(\pi D^2/4)i+(\pi D/2)[(D^2/4)+L^2]^{1/2}j \quad \cdots(3.1.3.13)$$

$$E=\pi kD^2+\pi DH+(\pi D^2/4)i+(\pi D^2/4)(1+4k^2)^{1/2}j \quad [L/D=k] \quad \cdots(3.1.3.14)$$

$$E=\pi kD^2+\pi D[\{4V_T/(\pi D^2)\}-\{4\pi kD^3/(12\pi D^2)\}]+(\pi D^2/4)i+(\pi D^2/4)(1+4k^2)^{1/2}j \quad \cdots(3.1.3.15)$$

$$E=\pi kD^2+\pi D[\{4V_T/(\pi D^2)\}-(kD/3)]+(\pi D^2/4)i+(\pi D^2/4)(1+4k^2)^{1/2}j \quad \cdots(3.1.3.16)$$

$$E=\pi kD^2+(4V_T/D)-(\pi kD^2/3)+(\pi D^2/4)i+(\pi D^2/4)(1+4k^2)^{1/2}j \quad \cdots(3.1.3.17)$$

上式の極小値を与える円筒部深さ－槽径比  $H/D$  を求める。

$$dE/dD=2\pi kD-\{4V_T/D^2\}-(2\pi kD/3)+(\pi D/2)i+(\pi D/2)(1+4k^2)^{1/2}j=0 \quad \cdots(3.1.3.18)$$

$$2\pi kD^3-4V_T-(2\pi kD^3/3)+(\pi D^3/2)i+(\pi D^3/2)(1+4k^2)^{1/2}j=0 \quad \cdots(3.1.3.19)$$

$$2\pi kD^3-4[(\pi D^3/4)(H/D)+(\pi kD^3/12)]-(2\pi kD^3/3)+(\pi D^3/2)i+(\pi D^3/2)(1+4k^2)^{1/2}j=0 \quad \cdots(3.1.3.20)$$

$$2k-(H/D)-(k/3)-(2k/3)+(1/2)i+(1/2)(1+4k^2)^{1/2}j=0 \quad \cdots(3.1.3.21)$$

$$\boxed{H/D=[i+(1+4k^2)^{1/2}j+2k]/2} \quad \cdots(3.1.3.22)$$

$i=j=k=1$  のとき、円錐部深さ－槽径比  $L/D$  は1、円筒部深さ－槽径比  $H/D$  は約2.62となる。これらがスカート型の経済的な貯槽形状となる。なお、円筒部深さは近似的に自由表面からの深さに等しいものと仮定した。

### 3.1.4 排出角

円錐排出部の半頂角  $\theta$  は、次式より求める。

$$\theta=\tan^{-1}[(1/2)(L/D)^{-1}] \quad [\tan\theta=R/L, R=D/2] \quad \cdots(3.1.4.1)$$

マスフロー設計を行う場合は、最適排出角  $\theta_{opt}$  を満たすように  $L/D$  値を修正する。

$$L/D=(1/2)\cot\theta_{opt} \quad \cdots(3.1.4.2)$$

### 【計算例】貯槽寸法

かさ密度  $0.800 \text{ t/m}^3$  の小麦  $500 \text{ t}$  をスカート型円筒サイロに貯蔵する場合の①貯槽容積  $V_T [\text{m}^3]$ 、②排出角  $\theta [\text{deg.}]$ 、③貯槽径  $D [\text{m}]$ 、④円筒部深さ  $H [\text{m}]$ 、⑤円錐部深さ  $L [\text{m}]$ 、⑥排出口径  $D_0 [\text{m}]$  を求めよ。ただし、貯槽容積－貯蔵物容積比 1.1、排出口径－槽径比 1/10、貯槽形状は経済的に最適な設計とする。(①  $688 \text{ m}^3$ , ②  $26.6^\circ$ , ③  $6.46 \text{ m}$ , ④  $16.9 \text{ m}$ , ⑤  $6.46 \text{ m}$ , ⑥  $0.646 \text{ m}$ )

$$V_b = M/\rho_b = 500/0.800 = 625 \text{ m}^3$$

$$V_T = (V_T/V_b)V_b = (1.1)(625) = 687.5 \text{ m}^3 \doteq \boxed{688 \text{ m}^3}$$

$$\theta = \tan^{-1}[(1/2)(L/D)^{-1}] = \tan^{-1}[(1/2)(1)^{-1}] = 26.565^\circ \doteq \boxed{26.6^\circ}$$

$$D = [(4V_b/\pi)/\{(H/D) + (1/6\tan\theta)\}]^{1/3} = [(4)(625/\pi)/\{(2.62) + (1/6\tan 26.565^\circ)\}]^{1/3} = 6.4589 \text{ m} \doteq \boxed{6.46 \text{ m}}$$

$$H = (H/D)D = (2.62)(6.4589) = 16.922 \text{ m} \doteq \boxed{16.9 \text{ m}}$$

$$L = (L/D)D = (1)(6.4589) = 6.4589 \text{ m} \doteq \boxed{6.46 \text{ m}}$$

$$D_0 = (D_0/D)D = (1/10)(6.4589) = 0.64589 \text{ m} \doteq \boxed{0.646 \text{ m}}$$

### 【問題】貯槽寸法

- (1) かさ密度  $0.650 \text{ t/m}^3$  の大豆  $130 \text{ t}$  をスカート型円筒サイロに貯蔵する場合の①貯槽容積  $V_T [\text{m}^3]$ 、②排出角  $\theta [\text{deg.}]$ 、③貯槽径  $D [\text{m}]$ 、④円筒部深さ  $H [\text{m}]$ 、⑤円錐部深さ  $L [\text{m}]$ 、⑥排出口径  $D_0 [\text{m}]$  を求めよ。ただし、貯槽容積－貯蔵物容積比 1.1、排出口径－槽径比 1/10、貯槽形状は経済的に最適な設計とする。(①  $220 \text{ m}^3$ , ②  $26.6^\circ$ , ③  $4.42 \text{ m}$ , ④  $11.6 \text{ m}$ , ⑤  $4.42 \text{ m}$ , ⑥  $0.442 \text{ m}$ )
- (2) かさ密度  $0.800 \text{ t/m}^3$  の小麦  $20.0 \text{ t}$  をホッパー型円筒サイロに貯蔵する場合の①貯槽容積  $V_T [\text{m}^3]$ 、②排出角  $\theta [\text{deg.}]$ 、③貯槽径  $D [\text{m}]$ 、④円筒部深さ  $H [\text{m}]$ 、⑤円錐部深さ  $L [\text{m}]$ 、⑥排出口径  $D_0 [\text{m}]$  を求めよ。ただし、貯槽容積－貯蔵物容積比 1.1、排出口径－槽径比 1/10、貯槽形状は経済的に最適な設計とする。(①  $27.5 \text{ m}^3$ , ②  $26.6^\circ$ , ③  $3.22 \text{ m}$ , ④  $2.00 \text{ m}$ , ⑤  $3.22 \text{ m}$ , ⑥  $0.322 \text{ m}$ )

## 3. 2 粉体圧

### 3.2.1 円筒部 [文献 10]

槽径  $D [\text{m}]$ 、深さ  $H [\text{m}]$  の貯槽円筒部 (断面積  $S [\text{m}^2]$ ) にかさ密度  $\rho_b [\text{kg/m}^3]$  の粉粒体が均一に充填されているものとする。貯蔵物の自由表面 (堆積面を平らにならした状態) から深さ  $h [\text{m}]$  の位置にある層高  $dh [\text{m}]$  の微小粉体層 (容積  $dV [\text{m}^3]$ ) に作用する垂直圧を  $P_v [\text{Pa}]$ 、水平圧を  $P_h [\text{Pa}]$ 、壁摩擦力を  $\tau_w [\text{Pa}]$ 、反力を壁圧  $P_w [\text{Pa}]$  とする。

①深槽 ( $h/D > 1.5$ ) の場合 深さ方向の静的粉体圧分布は Janssen (ヤンセン) の式で表され、微小粉体層に作用する力のつり合いより導かれる。

$$P_v S + \rho_b g dV = (P_v + dP_v)S + \tau_w dA \quad \cdots (3.2.1.1)$$

$$P_v (\pi D^2/4) + \rho_b g (\pi D^2/4) dh = (P_v + dP_v) (\pi D^2/4) + (\mu_w P_h) (\pi D dh) \quad \cdots (3.2.1.2)$$

$$P_v (\pi D^2/4) + \rho_b g (\pi D^2/4) dh = (P_v + dP_v) (\pi D^2/4) + (\mu_w K_a P_v) (\pi D dh) \quad [P_h = K_a P_v] \quad \cdots (3.2.1.3)$$

$$P_v + \rho_b g dh = (P_v + dP_v) + (4\mu_w K_a P_v dh)/D \quad \cdots (3.2.1.4)$$

$$D\rho_b g dh = DdP_v + 4\mu_w K_a P_v dh \quad \cdots (3.2.1.5)$$

$$(D\rho_b g - 4\mu_w K_a P_v) dh = DdP_v \quad \cdots (3.2.1.6)$$

$$dh=[D/(D\rho_{bg}-4\mu_wK_aP_v)]dP_v \quad \cdots(3.2.1.7)$$

$h=0\sim h$  のとき  $P_v=P_0\sim P_v$  の範囲で積分する。

$$h=-(4\mu_wK_a/D)^{-1}[\ln\{\rho_{bg}-(4\mu_wK_a/D)P_v\}-\ln\{\rho_{bg}-(4\mu_wK_a/D)P_0\}] \quad \cdots(3.2.1.8)$$

$$(4\mu_wK_a/D)h=\ln\{\rho_{bg}-(4\mu_wK_a/D)P_0\}/\{\rho_{bg}-(4\mu_wK_a/D)P_v\} \quad \cdots(3.2.1.9)$$

$$\exp[(4\mu_wK_a/D)h]=[\rho_{bg}-(4\mu_wK_a/D)P_0]/[\rho_{bg}-(4\mu_wK_a/D)P_v] \quad \cdots(3.2.1.10)$$

$$[\rho_{bg}-(4\mu_wK_a/D)P_v]\exp[(4\mu_wK_a/D)h]=\rho_{bg}-(4\mu_wK_a/D)P_0 \quad \cdots(3.2.1.11)$$

$$\rho_{bg}-(4\mu_wK_a/D)P_v=[\rho_{bg}-(4\mu_wK_a/D)P_0]\exp[-(4\mu_wK_a/D)h] \quad \cdots(3.2.1.12)$$

$$-(4\mu_wK_a/D)P_v=\rho_{bg}\exp[-(4\mu_wK_a/D)h]-\rho_{bg}-(4\mu_wK_a/D)P_0\exp[-(4\mu_wK_a/D)h] \quad \cdots(3.2.1.13)$$

$$P_v=[\rho_{bg}/(4\mu_wK_a/D)][1-\exp\{-4\mu_wK_a/D)h\}]+P_0\exp[-(4\mu_wK_a/D)h] \quad \cdots(3.2.1.14)$$

$$\boxed{P_v=[\rho_{bg}D/(4\mu_wK_a)][1-\exp\{-4\mu_wK_a/D)h\}]+P_0\exp[-(4\mu_wK_a/D)h]} \quad \cdots(3.2.1.15)$$

$$P_v=[\rho_{bg}(H/\eta)/(4\mu_wK_a)][1-\exp\{-4\mu_wK_a\eta(h/H)\}]+P_0\exp[-4\mu_wK_a\eta(h/H)] \quad [\eta=H/D] \quad \cdots(3.2.1.16)$$

$$\boxed{P_v/(\rho_{bg}H)=(4\mu_wK_a\eta)^{-1}[1-\exp\{-4\mu_wK_a\eta(h/H)\}]+[P_0/(\rho_{bg}H)]\exp[-4\mu_wK_a\eta(h/H)]} \quad \cdots(3.2.1.17)$$

$$\boxed{P_h/(\rho_{bg}H)=(4\mu_w\eta)^{-1}[1-\exp\{-4\mu_wK_a\eta(h/H)\}]+[K_aP_0/(\rho_{bg}H)]\exp[-4\mu_wK_a\eta(h/H)]} \quad [P_h=K_aP_v] \quad \cdots(3.2.1.18)$$

$$\boxed{P_w/(\rho_{bg}H)=(4\mu_w\eta)^{-1}[1-\exp\{-4\mu_wK_a\eta(h/H)\}]+[K_aP_0/(\rho_{bg}H)]\exp[-4\mu_wK_a\eta(h/H)]} \quad [P_w=P_h] \quad \cdots(3.2.1.19)$$

ただし、 $K_a$  はランキン係数( $=P_h/P_v=(1-\sin\phi)/(1+\sin\phi)$ )、 $\phi$  は内部摩擦角[deg.]、 $\mu_w$  は壁摩擦係数( $=\tan\phi_w$ )。投入時の動的粉体圧は、圧力上昇係数  $C_i=1.0\sim 2.0$  (指定がない場合 1.5) を Janssen 式の静的  $P_v$  値に乘じる [文献 11-14]。排出時の動的粉体圧は、圧力上昇係数  $C_d$  を Janssen 式の静的  $P_h$  値または静的  $P_w$  値に乘じる [文献 11-14]。いずれもランキン係数  $K_a$  の代わりに動的ランキン係数  $K_w=(1-\sin\phi_w)/(1+\sin\phi_w)$  を用いる。

$$h/D \leq 1.0 \text{ のとき} \quad C_d=1.0$$

$$1.0 < h/D < 1.5 \text{ のとき} \quad C_d=1.0+(0.7)[(h/D)-1.0]$$

$$1.5 \leq h/D \text{ のとき} \quad C_d=1.35$$

ただし、 $D$  は貯槽径[m]、 $h$  は貯蔵物の自由表面からの深さ[m]。

②浅槽 ( $h/D \leq 1.5$ ) の場合 垂直圧については、水圧と同じ式を用いる。

$$P_v=\rho_{bg}h+P_0 \quad \cdots(3.2.1.20)$$

$$\boxed{P_v/(\rho_{bg}H)=(h/H)+[P_0/(\rho_{bg}H)]} \quad \cdots(3.2.1.21)$$

$$\boxed{P_h/(\rho_{bg}H)=K_a(h/H)+[K_aP_0/(\rho_{bg}H)]} \quad [P_h=K_aP_v] \quad \cdots(3.2.1.22)$$

$$\boxed{P_w/(\rho_{bg}H)=K_a(h/H)+[K_aP_0/(\rho_{bg}H)]} \quad [P_w=P_h] \quad \cdots(3.2.1.23)$$

自由表面に作用する圧力  $P_0$  [Pa] は、外部から荷重がかけられていない限り 0 とする。

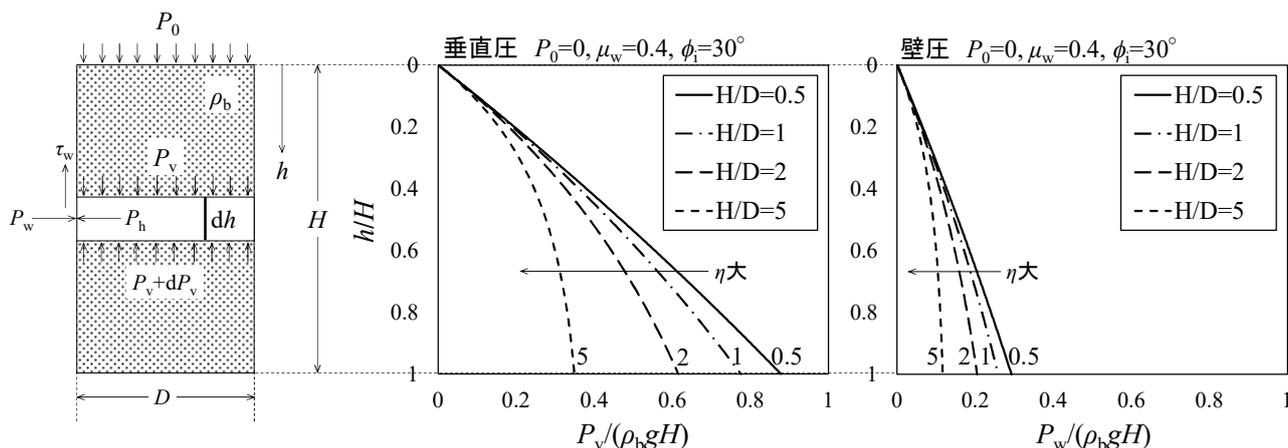


図 3.2.1.1 円筒貯槽内(深槽)における静的粉体圧分布の解析例

**【計算例】円筒部粉体圧**

かさ密度  $800 \text{ kg/m}^3$ 、壁摩擦係数  $0.4$ 、内部摩擦角  $30^\circ$  の小麦を槽径  $5.0 \text{ m}$  の深槽型円筒サイロに貯蔵する場合の円筒部における深さ方向の静的壁圧分布を求めよ。ただし、重力加速度  $9.81 \text{ m/s}^2$ 、円筒部深さー槽径比  $1$ 、貯蔵物は非付着性、貯蔵物の自由表面にかかる圧力は無視する。

$$K_a = (1 - \sin\phi) / (1 + \sin\phi) = (1 - \sin 30^\circ) / (1 + \sin 30^\circ) = 1/3$$

$$P_w = [\rho_b g D / (4\mu_w)] [1 - \exp\{- (4\mu_w K_a / D) h\}] = [(800)(9.81)(5.0) / \{(4)(0.4)\}] [1 - \exp\{- \{(4)(0.4)(1/3) / (5.0)\} h\}]$$

$$= (24525) [1 - \exp(-0.10666h)] \quad (P_0=0)$$

$h \text{ [m]}$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$P_w \text{ [kPa]}$	0	1.27	2.48	3.63	4.71	5.74	6.72	7.64	8.52	9.35	10.1

**【問題】円筒部粉体圧**

かさ密度  $650 \text{ kg/m}^3$ 、壁摩擦係数  $0.3$ 、内部摩擦角  $35^\circ$  の大豆を槽径  $8.0 \text{ m}$  の深槽型円筒サイロに貯蔵する場合の円筒部における深さ方向の静的壁圧分布を求めよ。ただし、重力加速度  $9.81 \text{ m/s}^2$ 、円筒部深さー槽径比  $1$ 、貯蔵物は非付着性、貯蔵物の自由表面にかかる圧力は無視する。

**3.2.2 円錐部 [文献 15-20]**

槽径  $D \text{ [m]}$ 、深さ  $L \text{ [m]}$ 、頂角  $2\theta \text{ [rad]}$  の貯槽円錐部(断面積  $S \text{ [m}^2\text{]})$  にかさ密度  $\rho_b \text{ [kg/m}^3\text{]}$  の粉粒体が均一に充填されているものとする。貯槽底面から高さ  $l \text{ [m]}$  の位置にある層高  $dl \text{ [m]}$  の微小粉体層(容積  $dV \text{ [m}^3\text{])}$  に作用する垂直圧を  $P_v \text{ [Pa]}$ 、水平圧を  $P_h \text{ [Pa]}$ 、壁摩擦力を  $\tau_w \text{ [Pa]}$ 、反力を壁圧  $P_w \text{ [Pa]}$  とする。微小粉体層に対する垂直方向の力のつり合いは、次式のように導かれる。

$$(P_v + dP_v)(S + dS) + \rho_b g dV = P_v S + P_w dA \sin\theta + \tau_w dA \cos\theta \quad \cdots(3.2.2.1)$$

$$P_v(S + dS) + dP_v(S + dS) + \rho_b g dV = P_v S + P_w dA \sin\theta + \tau_w dA \cos\theta \quad \cdots(3.2.2.2)$$

$$P_v dS + S dP_v + \rho_b g [(S + dS)(l + dl)/3 - (Sl/3)] = P_w [2\pi r(dl/\cos\theta)] \sin\theta + \tau_w [2\pi r(dl/\cos\theta)] \cos\theta \quad [dP_v \cdot dS \doteq 0] \quad \cdots(3.2.2.3)$$

$$P_v [\pi(r + dr)^2 - \pi r^2] + \pi r^2 dP_v + \rho_b g [\pi(r + dr)^2(l + dl)/3 - (\pi r^2 l/3)] = P_w (2\pi r dl \tan\theta) + \tau_w (2\pi r dl) \quad \cdots(3.2.2.4)$$

$$P_v (2\pi r dr) + \pi r^2 dP_v + \rho_b g [(\pi r^2 + 2\pi r dr)(l + dl)/3 - (\pi r^2 l/3)] = P_w (2\pi r dl \tan\theta) + \tau_w (2\pi r dl) \quad [(dr)^2 \doteq 0] \quad \cdots(3.2.2.5)$$

$$P_v (2\pi r dr) + \pi r^2 dP_v + \rho_b g [(\pi r^2 l + \pi r^2 dl + 2\pi r l dr)/3 - (\pi r^2 l/3)] = P_w (2\pi r dl \tan\theta) + \tau_w (2\pi r dl) \quad [dr \cdot dl \doteq 0] \quad \cdots(3.2.2.6)$$

$$P_v [2\pi l (\tan\theta) dl (\tan\theta)] + \pi l (\tan\theta)^2 dP_v + \rho_b g [(1/3)\pi l (\tan\theta)^2 dl + (2/3)\pi l (\tan\theta) dl \tan\theta]$$

$$=P_w(2\pi(l\tan\theta)d/\tan\theta)+\tau_w(2\pi(l\tan\theta)dl) \quad [l=l\tan\theta] \quad \cdots(3.2.2.7)$$

$$P_v(2\pi l/d\tan^2\theta)+(\pi l^2\tan^2\theta)dP_v+\rho_b g(\pi l^2 d/\tan^2\theta)=P_w(2\pi l/d\tan^2\theta)+\tau_w(2\pi l/d\tan\theta) \quad \cdots(3.2.2.8)$$

$$dP_v/dl+2P_v/l+\rho_b g=2P_w/l+2\mu_w P_w/(l\tan\theta) \quad [\tau_w=\mu_w P_w=P_w\tan\phi_w] \quad \cdots(3.2.2.9)$$

微小粉体層内では近似的に次式が成り立つものとする。

$$dP_v/dl+\rho_b g=2\mu_w P_w/(l\tan\theta) \quad [P_v\div P_w] \quad \cdots(3.2.2.10)$$

ただし、 $\phi_w$  は壁摩擦角[deg.]、 $\mu_w$  は壁摩擦係数[-]( $=\tan\phi_w$ )。

壁圧  $P_w$  [Pa]は、 $P_w$  方向の力のつり合いより次式のように導かれる。

$$P_w dA=P_h dA\cos^2\theta+(P_v+dP_v)dA\sin^2\theta \quad \cdots(3.2.2.11)$$

$$P_w dA=P_h dA\cos^2\theta+P_v dA\sin^2\theta \quad \cdots(3.2.2.12)$$

$$P_w=P_h\cos^2\theta+P_v\sin^2\theta \quad \cdots(3.2.2.13)$$

$$P_w=P_v(K_a\cos^2\theta+\sin^2\theta) \quad \cdots(3.2.2.14)$$

$$P_w=KP_v \quad [K=K_a\cos^2\theta+\sin^2\theta] \quad \cdots(3.2.2.15)$$

ただし、 $K$  は壁圧-垂直圧比[-]、 $K_a$  はランキン係数[-]( $=P_h/P_v$ )、 $\phi$  は内部摩擦角[deg.]。

上の微分方程式に代入すると、静的粉体圧分布の基本式が導かれる。

$$dP_v/dl+\rho_b g=2\mu_w KP_v/(l\tan\theta) \quad \cdots(3.2.2.16)$$

$$\boxed{dP_v/dl+\rho_b g=\alpha P_v/l} \quad [\alpha=2\mu_w K/\tan\theta=2\mu_w(K_a\cos^2\theta+\sin^2\theta)\cot\theta] \quad \cdots(3.2.2.17)$$

上式を解く。 $\alpha\neq 1$  のとき、 $dP_v/dl$  が  $P_v/l$  と等しくなるような  $P_v$  を一般解の候補とする。

$$P_v=C_1 l^\alpha+C_2 l \quad (C_1 \text{ と } C_2 \text{ は定数}) \quad \cdots(3.2.2.18)$$

粉体層の上部に荷重が加わっているとき( $l=L$  のとき  $P_v=P_0$ )の一般解は、次式となる。

$$P_0=C_1 L^\alpha+C_2 L \quad \cdots(3.2.2.19)$$

$$C_2=-C_1 L^{\alpha-1}+P_0 \quad \cdots(3.2.2.20)$$

$$P_v=C_1 l^\alpha-C_1 L^{\alpha-1}l+P_0 l \quad \cdots(3.2.2.21)$$

$$P_v=C_1 l(l^{\alpha-1}-L^{\alpha-1})+P_0 l \quad \cdots(3.2.2.22)$$

粉体圧分布の基本式に代入する。

$$d[C_1 l(l^{\alpha-1}-L^{\alpha-1})+P_0 l]/dl+\rho_b g=(\alpha/l)[C_1 l(l^{\alpha-1}-L^{\alpha-1})+P_0 l] \quad \cdots(3.2.2.23)$$

$$C_1(l^{\alpha-1}-L^{\alpha-1})+C_1(\alpha-1)l^{\alpha-1}+P_0+\rho_b g=C_1\alpha(l^{\alpha-1}-L^{\alpha-1})+P_0 \quad \cdots(3.2.2.24)$$

$$C_1 l^{\alpha-1}-C_1 L^{\alpha-1}+C_1\alpha l^{\alpha-1}-C_1 l^{\alpha-1}+\rho_b g=C_1\alpha l^{\alpha-1}-C_1\alpha L^{\alpha-1} \quad \cdots(3.2.2.25)$$

$$-C_1 L^{\alpha-1}+\rho_b g=-C_1\alpha L^{\alpha-1} \quad \cdots(3.2.2.26)$$

$$C_1=-\rho_b g/[(\alpha-1)L^{\alpha-1}] \quad \cdots(3.2.2.27)$$

$$C_2=-[-\rho_b g/(\alpha-1)L^{\alpha-1}]L^{\alpha-1}+P_0 \quad \cdots(3.2.2.28)$$

$$C_2=\rho_b g/(\alpha-1)+P_0 \quad \cdots(3.2.2.29)$$

一般解の式に代入すると、 $\alpha\neq 1$  のときの静的粉体圧分布式が導かれる。

$$P_v=-\rho_b g l^\alpha/[(\alpha-1)L^{\alpha-1}]+\rho_b g l/(\alpha-1)+P_0 \quad \cdots(3.2.2.30)$$

$$\boxed{P_v=[\rho_b g l/(\alpha-1)][1-(l/L)^{\alpha-1}]+P_0} \quad \cdots(3.2.2.31)$$

$$P_v=[\rho_b g L/(\alpha-1)](l/L)[1-(l/L)^{\alpha-1}]+P_0 \quad \cdots(3.2.2.32)$$

$$\boxed{P_v/(\rho_b g L)=[1/(\alpha-1)][(l/L)-(l/L)^\alpha]+P_0/(\rho_b g L)} \quad [\alpha=2\mu_w K/\tan\theta] \quad \cdots(3.2.2.33)$$

$$\boxed{P_h/(\rho_b g L)=[K_a/(\alpha-1)][(l/L)-(l/L)^\alpha]+K_a P_0/(\rho_b g L)} \quad [P_h=K_a P_v, K_a=(1-\sin\phi)/(1+\sin\phi)] \quad \cdots(3.2.2.34)$$

$$\boxed{P_w/(\rho_b g L)=[K/(\alpha-1)][(l/L)-(l/L)^\alpha]+K P_0/(\rho_b g L)} \quad [P_w=K P_v, K=K_a\cos^2\theta+\sin^2\theta] \quad \cdots(3.2.2.35)$$

$\alpha=1$  のとき、 $dP_v/dl$  が  $P_v/l$  と等しくなるような  $P_v$  を一般解の候補とする。

$$P_v = C_1 l \ln l + C_2 l \quad \cdots (3.2.2.36)$$

粉体層の上部に荷重が加わっているとき ( $l=L$  のとき  $P_v=P_0$ ) の一般解は、次式となる。

$$P_0 = C_1 L \ln L + C_2 L \quad \cdots (3.2.2.37)$$

$$C_2 = -C_1 \ln L + (P_0/L) \quad \cdots (3.2.2.38)$$

$$P_v = C_1 l \ln l + [-C_1 \ln L + (P_0/L)] l \quad \cdots (3.2.2.39)$$

$$P_v = C_1 l (\ln l - \ln L) + (P_0/L) l \quad \cdots (3.2.2.40)$$

粉体圧分布の基本式に代入する。

$$d[C_1 l (\ln l - \ln L) + (P_0/L) l] / dl + \rho_b g = [C_1 l (\ln l - \ln L) + (P_0/L) l] / l \quad \cdots (3.2.2.41)$$

$$C_1 (\ln l - \ln L) + C_1 l (1/l) + (P_0/L) + \rho_b g = C_1 (\ln l - \ln L) + (P_0/L) \quad \cdots (3.2.2.42)$$

$$C_1 = -\rho_b g \quad \cdots (3.2.2.43)$$

$$C_2 = \rho_b g \ln L + (P_0/L) \quad \cdots (3.2.2.44)$$

一般解の式に代入すると、 $\alpha=1$  のときの静的粉体圧分布式が導かれる。

$$P_v = -\rho_b g l \ln l + [\rho_b g \ln L + (P_0/L)] l \quad \cdots (3.2.2.45)$$

$$\boxed{P_v = -\rho_b g l \ln(l/L) + (P_0 l/L)} \quad \cdots (3.2.2.46)$$

$$P_v = -\rho_b g L (l/L) \ln(l/L) + (P_0 l/L) \quad \cdots (3.2.2.47)$$

$$\boxed{P_v / (\rho_b g L) = -(l/L) \ln(l/L) + [P_0 / (\rho_b g L)] (l/L)} \quad [\alpha=1] \quad \cdots (3.2.2.48)$$

$$\boxed{P_h / (\rho_b g L) = -K_a (l/L) \ln(l/L) + [K_a P_0 / (\rho_b g L)] (l/L)} \quad [P_h = K_a P_v, K_a = (1 - \sin \phi) / (1 + \sin \phi)] \quad \cdots (3.2.2.49)$$

$$\boxed{P_w / (\rho_b g L) = -K (l/L) \ln(l/L) + [K P_0 / (\rho_b g L)] (l/L)} \quad [P_w = K P_v, K = K_a \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] \quad \cdots (3.2.2.50)$$

排出時の動的粉体圧分布式は、次式を用いる **[文献 20]**。

$$\boxed{P_v / (\rho_b g L) = [1 / (K - 1)] [(l/L) - (l/L)^K] + P_0 / (\rho_b g L)} \quad [K = 2(K_2 - 1), K_2 = K_1 \{1 + (\tan \phi_w / \tan \theta)\}] \quad \cdots (3.2.2.51)$$

$$\boxed{P_h / (\rho_b g L) = [K_w / (K - 1)] [(l/L) - (l/L)^K] + K_w P_0 / (\rho_b g L)} \quad [P_h = K_w P_v, K_w = (1 - \sin \phi_w) / (1 + \sin \phi_w)] \quad \cdots (3.2.2.52)$$

$$\boxed{P_w / (\rho_b g L) = [K_1 / (K - 1)] [(l/L) - (l/L)^K] + K_1 P_0 / (\rho_b g L)} \quad \cdots (3.2.2.53)$$

$$[P_w = K_1 P_v, K_1 = (1 + \sin \phi_e \cos 2\beta) / \{1 - \sin \phi_e \cos(2\theta + 2\beta)\}, 2\beta = \phi_w + \sin^{-1}(\sin \phi_w / \sin \phi_e)]$$

ただし、 $\beta$  は円錐貯槽の傾斜壁と最大主応力面のなす角[deg.]、 $\phi_e$  は有効摩擦角[deg.] (非付着性粉体の場合は内部摩擦角  $\phi$  に等しい)、 $\phi_w$  は壁摩擦角[deg.]。

円筒部からの圧力  $P_0$  [Pa] は、次式で表される。

$$P_0 = \rho_b g H \quad \cdots (3.2.2.54)$$

ただし、 $H$  は円筒部の自由表面から円錐部上底までの深さ[m]、 $\rho_b$  は貯蔵物のかさ密度[kg/m<sup>3</sup>]。

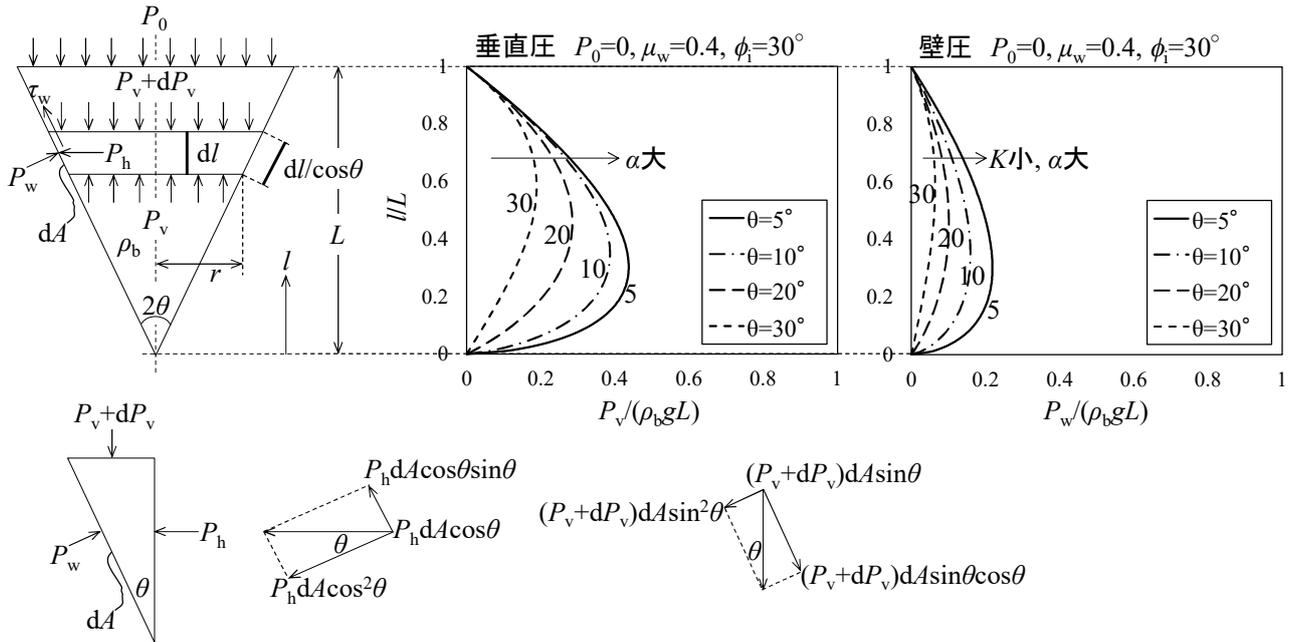


図 3. 2. 2. 1 円錐貯槽内における静的粉体圧分布の解析例

**【計算例】円錐部粉体圧**

かさ密度  $800 \text{ kg/m}^3$ 、壁摩擦係数  $0.4$ 、内部摩擦角  $30^\circ$  の小麦を槽径  $5.0 \text{ m}$  の深槽型円筒サイロに貯蔵する場合の円錐部における深さ方向の静的壁圧分布を求めよ。ただし、重力加速度  $9.81 \text{ m/s}^2$ 、円筒部深さー槽径比  $1$ 、円錐部深さー槽径比  $1$ 、排出角  $25^\circ$ 、貯蔵物は非付着性とする。

$$K_a = (1 - \sin\phi_i) / (1 + \sin\phi_i) = (1 - \sin 30^\circ) / (1 + \sin 30^\circ) = 1/3$$

$$K = K_a \cos^2\theta + \sin^2\theta = (1/3) \cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ = 0.45240$$

$$\alpha = 2\mu_w K / \tan\theta = (2)(0.4)(0.45240) / (\tan 25^\circ) = 0.77613$$

$$H = (H/D)D = (1)(5.0) = 5.0 \text{ m}$$

$$P_0 = \rho_b g H = (800)(9.81)(5.0) = 39240 \text{ Pa} \approx 39.2 \text{ kPa}$$

$$L = (L/D)D = (1)(5.0) = 5.0 \text{ m}$$

$$P_w = [\rho_b g L K / (\alpha - 1)] [(l/L) - (l/L)^\alpha] + P_0 = [(800)(9.81)(5.0)(0.45240) / (0.77613 - 1)] [(l/5.0) - (l/5.0)^{0.77613}] + 39240$$

$$= (-79296) [(l/5.0) - (l/5.0)^{0.77613}] + 39240$$

$l \text{ [m]}$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$P_w \text{ [kPa]}$	39.2	44.6	46.1	46.6	46.5	45.9	45.0	43.9	42.5	40.9	39.2

**【問題】円錐部粉体圧**

かさ密度  $650 \text{ kg/m}^3$ 、壁摩擦係数  $0.3$ 、内部摩擦角  $35^\circ$  の大豆を槽径  $8.0 \text{ m}$  の深槽型円筒サイロに貯蔵する場合の円錐部における深さ方向の静的壁圧分布を求めよ。ただし、重力加速度  $9.81 \text{ m/s}^2$ 、円筒部深さー槽径比  $1$ 、円錐部深さー槽径比  $1$ 、排出角  $25^\circ$ 、貯蔵物は非付着性とする。

**3. 3 強度設計**

**3. 3. 1 薄肉円筒の板厚**

板厚(いたあつ)が内径の 12%以下、あるいは外径の 10%以下の円筒を薄肉(うすく)円筒という。いま、直径  $D_T$  [mm]、高さ  $L_T$  [mm]、板厚  $t_T$  [mm]の薄肉円筒に内圧  $P_i$  [MPa]または[N/mm<sup>2</sup>]が作用するとき、円筒の壁内部には円筒を破断しようとする軸応力  $\sigma_L$  [MPa]と円周応力(フープ応力ともいう)  $\sigma_\theta$  [MPa]の 2 種類の引張応力が生じる。このとき、内圧  $P_i$ が円筒断面に及ぼす力は、軸応力  $\sigma_L$ が円筒壁面に対して垂直方向に及ぼす力とつり合っていることから、両者を等置して板厚  $t_T$  [mm]が導かれる。

$$P_i(\pi D_T^2/4) = \sigma_L(\pi D_T t_T) \quad \cdots(3.3.1.1)$$

$$t_T = P_i D_T / (4\sigma_L) \quad \cdots(3.3.1.2)$$

一方、内圧  $P_i$ が円筒の投影面(投影面積  $D_T L_T$ )に及ぼす力は、円周応力  $\sigma_\theta$ が円筒壁面に対して円周方向に及ぼす力とつり合っていることから、両者を等置して板厚  $t_T$  [mm]が導かれる。

$$P_i D_T L_T = 2\sigma_\theta L_T t_T \quad \cdots(3.3.1.3)$$

$$t_T = P_i D_T / (2\sigma_\theta) \quad \cdots(3.3.1.4)$$

軸応力、円周応力ともに円筒を破断しようとする応力であることから、いずれか大きい方に合わせて板厚を計算すればよい。軸応力よりも常に大きい円周応力の式を用いる。

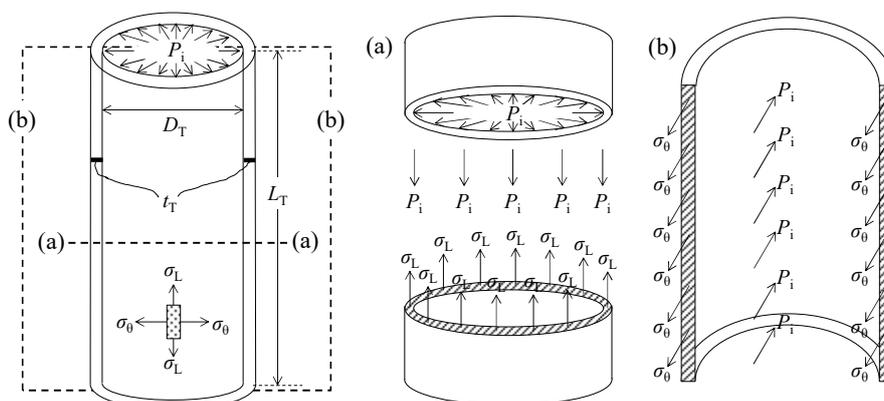


図 3.3.1.1 内圧を受ける薄肉円筒 [文献 21]

### 3.3.2 貯槽円筒部の板厚

貯槽円筒部の板厚  $t_T$  [mm]は、次式で与えられる。

$$t_T = (P_{w,max} + P_a) D / (2\eta_e \sigma) \quad \cdots(3.3.2.1)$$

ただし、 $D$ は貯槽径[mm]、 $P_a$ は空気圧[N/mm<sup>2</sup>]、 $P_{w,max}$ は貯蔵物から受ける壁圧の最大値[N/mm<sup>2</sup>]、 $\sigma$ は貯槽材の許容応力[N/mm<sup>2</sup>](鉄鋼 100 N/mm<sup>2</sup>、コンクリート 250 N/mm<sup>2</sup>)、 $\eta_e$ は溶接継手効率[-]。

円筒部の最大静的粉体圧  $P_{max}$  [Pa]は、粉体圧分布式の深さ  $h$  を無限大に近づけることで導かれる。

$$P_{v,max} = \rho_b g D / (4\mu_w K_a) \quad \cdots(3.3.2.2)$$

$$P_{h,max} = \rho_b g D / (4\mu_w) \quad [P_h = K_a P_v] \quad \cdots(3.3.2.3)$$

$$P_{w,max} = \rho_b g D / (4\mu_w) \quad [P_w (=P_h) = K_a P_v] \quad \cdots(3.3.2.4)$$

#### 【計算例】貯槽円筒部の板厚

かさ密度 800 kg/m<sup>3</sup>、壁摩擦係数 0.4 の小麦を槽径 5.0 m の深槽型コンクリート製円筒サイロに貯蔵する場合の円筒部における①最大静的壁圧  $P_{w,max}$  [kPa]と②槽壁の板厚  $t_{Ta}$  [mm]を求めよ。ただし、実際の板厚

は設計値を 10 倍した値を採用するものとし、重力加速度  $9.81 \text{ m/s}^2$ 、空気圧  $100 \text{ kPa}$ 、溶接接手効率  $0.6$ 、貯蔵物は非付着性とする。(① $24.5 \text{ kPa}$ , ② $20.8 \text{ mm}$ )

$$P_{w,\max} = \rho_b g D / (4\mu_w) = (800)(9.81)(5.0) / [(4)(0.4)] = 24525 \text{ Pa} \doteq \boxed{24.5 \text{ kPa}}$$

$$t_{\text{ra}} = 10 t_{\text{T}} = 10 (P_{w,\max} + P_a) D / (2\eta_e \sigma)$$

$$= (10) [(24525 \times 10^{-6})^{N/\text{mm}^2} + (100000 \times 10^{-6})^{N/\text{mm}^2}] (5000) \text{ mm} / [(2)(0.6)(250)^{N/\text{mm}^2}] = 20.754 \text{ mm} \doteq \boxed{20.8 \text{ mm}}$$

### 【問題】貯槽円筒部の板厚

かさ密度  $650 \text{ kg/m}^3$ 、壁摩擦係数  $0.3$  の大豆を槽径  $8.0 \text{ m}$  の深槽型コンクリート製円筒サイロに貯蔵する場合の円筒部における①最大静的壁圧  $P_{w,\max}$  [kPa]と②槽壁の板厚  $t_{\text{ra}}$  [mm]を求めよ。ただし、実際の板厚は設計値を 10 倍した値を採用するものとし、重力加速度  $9.81 \text{ m/s}^2$ 、空気圧  $100 \text{ kPa}$ 、溶接接手効率  $0.6$ 、貯蔵物は非付着性とする。(① $42.5 \text{ kPa}$ , ② $38.0 \text{ mm}$ )

### 3.3.3 貯槽円錐部の板厚

貯槽円錐部の板厚  $t_{\text{T}}$  [mm]は、次式のうちいずれか大きい値を採用する。

$$(\text{母線方向}) \quad t_1 = T_1 / (\eta_e \sigma) \quad [T_1 = [P_a(\pi D^2/4) + (M + W_c)g] / [\pi D \sin(90^\circ - \theta)]] \quad \cdots(3.3.3.1)$$

$$(\text{円錐方向}) \quad t_2 = T_2 / (\eta_e \sigma) \quad [T_2 = [(P_{w,\max} + P_a)D] / [2 \sin(90^\circ - \theta)]] \quad \cdots(3.3.3.2)$$

ただし、 $g$  は重力加速度 [ $\text{m/s}^2$ ]、 $M$  は貯蔵物重量 [kg]、 $T_1$  は母線方向の張力 [ $\text{N/mm}$ ]、 $T_2$  は円錐方向の張力 [ $\text{N/mm}$ ]、 $W_c$  は円錐部重量 [kg]、 $\theta$  は円錐部の半頂角 [deg.]。

実際の板厚  $t_{\text{ra}}$  は、安全のため計算値  $t_{\text{T}}$  の 5~10 倍にする。

円錐部の最大静的粉体圧  $P_{\max}$  [Pa]は、粉体圧分布式の極値を求めることで導かれる。

$$dP_v/dl = [\rho_b g L / (\alpha - 1)] [(1/L) - \alpha (l_m/L)^{\alpha-1} (1/L)] = 0 \quad \cdots(3.3.3.3)$$

$$l_m = (L^{\alpha-1} / \alpha)^{1/(\alpha-1)} \quad [\alpha = 2\mu_w K / \tan\theta, K = K_a \cos^2\theta + \sin^2\theta] \quad \cdots(3.3.3.4)$$

$$P_{v,\max} = [\rho_b g L / (\alpha - 1)] [(l_m/L) - (l_m/L)^\alpha] + P_0 \quad \cdots(3.3.3.5)$$

$$P_{h,\max} = [\rho_b g L K_a / (\alpha - 1)] [(l_m/L) - (l_m/L)^\alpha] + P_0 \quad [P_h = K_a P_v] \quad \cdots(3.3.3.6)$$

$$P_{w,\max} = [\rho_b g L K / (\alpha - 1)] [(l_m/L) - (l_m/L)^\alpha] + P_0 \quad [P_w = K P_v] \quad \cdots(3.3.3.7)$$

### 【計算例】貯槽円錐部の板厚

かさ密度  $800 \text{ kg/m}^3$ 、壁摩擦係数  $0.4$ 、内部摩擦角  $30^\circ$  の小麦  $200 \text{ t}$  を槽径  $5.0 \text{ m}$  の深槽型コンクリート製円筒サイロに貯蔵する場合の円錐部における①最大静的壁圧  $P_{w,\max}$  [kPa]と②槽壁の板厚  $t_{\text{ra}}$  [mm]を求めよ。ただし、実際の板厚は設計値を 10 倍した値を採用するものとし、重力加速度  $9.81 \text{ m/s}^2$ 、空気圧  $100 \text{ kPa}$ 、溶接接手効率  $0.6$ 、排出角  $25^\circ$ 、円錐部重量  $30 \text{ t}$ 、貯蔵物は非付着性とする。(① $46.6 \text{ kPa}$ , ② $27.0 \text{ mm}$ )

$$K_a = (1 - \sin\phi) / (1 + \sin\phi) = (1 - \sin 30^\circ) / (1 + \sin 30^\circ) = 1/3$$

$$K = K_a \cos^2\theta + \sin^2\theta = (1/3) \cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ = 0.45240$$

$$\alpha = 2\mu_w K / \tan\theta = (2)(0.4)(0.45240) / (\tan 25^\circ) = 0.77613$$

$$H = (H/D)D = (1)(5.0) = 5.0 \text{ m}$$

$$P_0 = \rho_b g H = (800)(9.81)(5.0) = 39240 \text{ Pa}$$

$$L = (L/D)D = (1)(5.0) = 5.0 \text{ m}$$

$$l_m = (L^{\alpha-1} / \alpha)^{1/(\alpha-1)} = (5.0^{0.77613-1} / 0.77613)^{1/(0.77613-1)} = 1.6118 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
 P_{w,max} &= [\rho_b g L K / (\alpha - 1)] [(l_m/L) - (l_m/L)^\alpha] + P_0 \\
 &= [(800)(9.81)(5.0)(0.45240) / (0.77613 - 1)] [(1.6118/5.0) - (1.6118/5.0)^{0.77613}] + 39240 = 46613 \text{ Pa} \doteq \boxed{46.6 \text{ kPa}} \\
 T_1 &= [P_a (\pi D^2 / 4) + (M + W_c) g] / [\pi D \sin(90^\circ - \theta)] \\
 &= [(100000 \times 10^{-6}) \text{ N/mm}^2 [\pi (5000)^2 / 4] + (200000 + 30000)(9.81)] / [5000 \pi \sin(90^\circ - 25^\circ)] = 296.41 \text{ N/mm} \\
 t_1 &= T_1 / (\eta_e \sigma) = (296.41) / [(0.6)(250)] = 1.9760 \text{ mm} \\
 T_2 &= [(P_{w,max} + P_a) D] / [2 \sin(90^\circ - \theta)] = [(46613 \times 10^{-6} + 100000 \times 10^{-6})(5000)] / [2 \sin(90^\circ - 25^\circ)] = 404.42 \text{ N/mm} \\
 t_2 &= T_2 / (\eta_e \sigma) = (404.42) / [(0.6)(250)] = 2.6961 \text{ mm} (> t_1) \\
 t_{1a} &= 10 t_1 = 10 t_2 = (10)(2.6961) = 26.961 \text{ mm} \doteq \boxed{27.0 \text{ mm}}
 \end{aligned}$$

### 【問題】貯槽円錐部の板厚

かさ密度  $650 \text{ kg/m}^3$ 、壁摩擦係数  $0.3$ 、内部摩擦角  $35^\circ$  の大豆  $500 \text{ t}$  を槽径  $8.0 \text{ m}$  の深槽型コンクリート製円筒サイロに貯蔵する場合の円錐部における①最大静的壁圧  $P_{w,max}$  [kPa]と②槽壁の板厚  $t_{1a}$  [mm]を求めよ。ただし、実際の板厚は設計値を  $10$  倍した値を採用するものとし、重力加速度  $9.81 \text{ m/s}^2$ 、空気圧  $100 \text{ kPa}$ 、溶接接手効率  $0.6$ 、排出角  $25^\circ$ 、円錐部重量  $50 \text{ t}$ 、貯蔵物は非付着性とする。(① $61.1 \text{ kPa}$ , ② $47.4 \text{ mm}$ )

## 3. 4 排出設計

### 3.4.1 最適排出角

貯槽円錐部からの排出機構(フローパターン)は、貯蔵物の堆積面が液面のように等しく沈下して貯蔵物の全体が排出されるマスフローと、傾斜壁近傍の貯蔵物が粉体圧による摩擦のために流動せず、中心部のみが流れて貯蔵物の一部が残留するファンネルフローに大別される。マスフローの条件を満たす円錐排出部の半頂角  $\theta$  [deg.]は、応力限界時のモール円を作図して次式のように導かれる。[文献 22, 23]

$$(\text{三角形 RST}) \quad \varphi = 180^\circ - 90^\circ - [45^\circ - (\phi/2)] = 45^\circ + (\phi/2) \quad \dots(3.4.1.1)$$

$$(\text{三角形 OXX}') \quad \theta = 180^\circ - 90^\circ - \varphi = 90^\circ - [45^\circ + (\phi/2)] = 45^\circ - (\phi/2) \quad \dots(3.4.1.2)$$

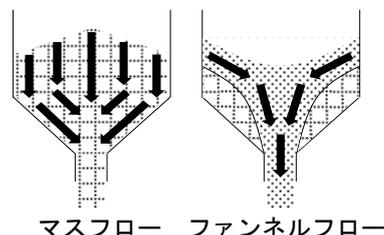
この角度以下でマスフローとなる。より詳しくは、マスフローとファンネルフローの境界にあたる最適の排出角  $\theta_{opt}$  を与える Jenike の式がある(マスフロー設計)。[文献 24, 25]

$$\theta_{opt} = 90^\circ - (1/2) \cos^{-1} [(1 - \sin \phi_e) / (2 \sin \phi_e)] - \beta \quad \dots(3.4.1.3)$$

$$\beta = (1/2) [\phi_w + \sin^{-1} (\sin \phi_w / \sin \phi_e)] \quad \dots(3.4.1.4)$$

ただし、 $\beta$  は円錐貯槽の傾斜壁と最大主応力面のなす角[deg.]、 $\phi_e$  は有効摩擦角[deg.](非付着性粉体の場合は内部摩擦角  $\phi$  に等しい)、 $\phi_w$  は壁摩擦角[deg.]。

排出口付近の閉塞を防ぐには、円錐部の半頂角を鋭くして粉体の滑りを良好にする、排出口径を大きくとる、貯槽本体に衝撃(ノッカー)や振動(バイブレーター)を加える、内容物に空気を吹き込む、円錐部内に仕切板を取り付けて粉体圧を下げるなどが挙げられる[文献 26]。



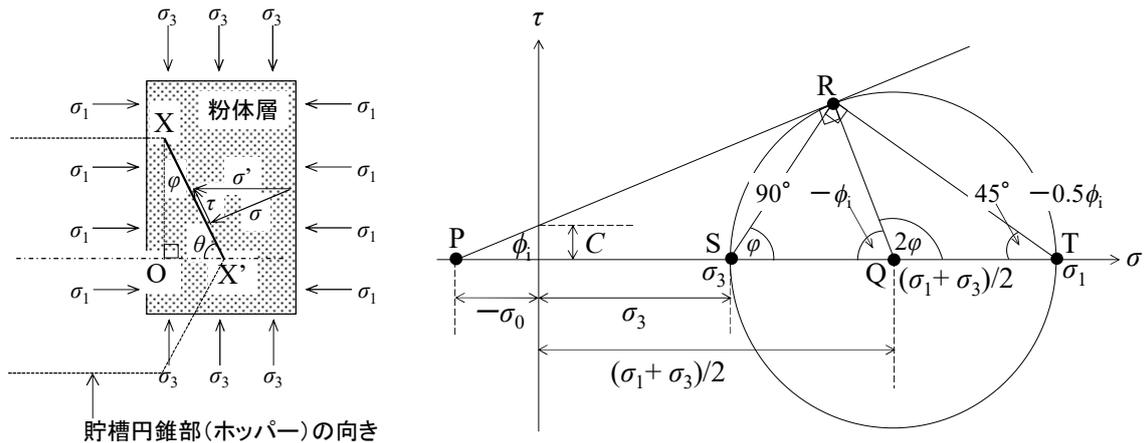


図 3.4.1.1 ホッパー角の解析 [文献 27, 28]

**【計算例】最適排出角**

壁摩擦係数 0.4、内部摩擦角 30°の小麦をホッパーに貯蔵する場合のマスフロー設計における最適排出角  $\theta_{opt}$  を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。(25.1°)

$$\phi_w = \tan^{-1} \mu_w = \tan^{-1} 0.4 = 21.801^\circ$$

$$\beta = (1/2)[\phi_w + \sin^{-1}(\sin \phi_w / \sin \phi_c)] = (1/2)[\phi_w + \sin^{-1}(\sin \phi_w / \sin \phi)] = (1/2)[21.801^\circ + \sin^{-1}(\sin 21.801^\circ / \sin 30^\circ)] = 34.884^\circ$$

$$\theta_{opt} = 90^\circ - (1/2)\cos^{-1}[(1 - \sin \phi_c) / (2\sin \phi_c)] - \beta = 90^\circ - (1/2)\cos^{-1}[(1 - \sin \phi) / (2\sin \phi)] - \beta$$

$$= 90^\circ - (1/2)\cos^{-1}[(1 - \sin 30^\circ) / (2\sin 30^\circ)] - 34.884^\circ = 25.116^\circ \approx \boxed{25.1^\circ}$$

**【問題】最適排出角**

壁摩擦係数 0.3、内部摩擦角 35°の大豆をホッパーに貯蔵する場合のマスフロー設計における最適排出角  $\theta_{opt}$  を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。(32.5°)

**3.4.2 閉塞限界径**

円錐部の排出口径  $D_0$  [m]は、粉体排出時に架橋(アーチ)が起こらない下限の口径(閉塞限界径)  $D_c$  [m]よりも大きくとる。非付着性粉体( $C=0$ )の場合は Langmaid & Rose の式 [文献 29]、付着性粉体( $C \neq 0$ )の場合は Gardner の式を用いる [文献 30-33]。

(非付着性粉体)  $D_c / D_{ps} = 2.3 + 0.071 \phi^{1.8} \dots (3.4.2.1)$

(付着性粉体)  $D_c = (4C / \rho_b)(1 + \sin \phi) \dots (3.4.2.2)$

ただし、 $D_{ps}$  は比表面積径[m]、 $\phi$  は比表面積形状係数[-](=表面積形状係数  $\phi_s$  ÷ 体積形状係数  $\phi_v$ )。

**【計算例】閉塞限界径**

比表面積径 1.00 mm の球状粒子に対するホッパー閉塞限界径  $D_c$  [mm]を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。

(4.09 mm)

$$V_p = (4/3)\pi(D_p/2)^3 = (\pi/6)D_p^3$$

$$\phi_v = V_p / D_p^3 = (\pi/6)D_p^3 / D_p^3 = \pi/6$$

$$S_p = 4\pi(D_p/2)^2 = \pi D_p^2$$

$$\phi_s = S_p/D_p^2 = \pi D_p^2/D_p^2 = \pi$$

$$\phi = \phi_s/\phi_v = \pi/(\pi/6) = 6$$

$$D_c/D_{ps} = 2.3 + 0.071\phi^{1.8} = 2.3 + (0.071)(6)^{1.8} = 4.0862$$

$$D_c = (D_c/D_{ps})D_{ps} = (4.0862)(1.00) = 4.0862 \text{ mm} \doteq \boxed{4.09 \text{ mm}}$$

### 【問題】閉塞限界径

比表面積径 1.00 mm の縦と横と高さの寸法比が 1 : 2 : 5 の直方体粒子に対するホッパー閉塞限界径  $D_c$  [mm] を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。(2.94 mm)

### 3.4.3 排出時間

貯蔵物の排出時間  $\tau_d$  [s] は、次式で表される。

$$\tau_d = M/W \quad \dots(3.4.3.1)$$

ただし、 $M$  は貯蔵物の重量[kg]、 $W$  は排出速度[kg/s]。

貯槽円錐部からの排出速度式として、田中・川合の式がある【文献 34】。

$$D_p/D_0 < 0.1 \text{ のとき} \quad W = 0.18g^{0.5}(\mu_i \tan \theta)^{-0.32} \rho_b D_p^{2.5} (D_p/D_0)^{-2.7} \quad \dots(3.4.3.2)$$

$$0.1 < D_p/D_0 < 0.23 \text{ のとき} \quad W = 0.10g^{0.5}(\mu_i \tan \theta)^{-0.32} \rho_b D_p^{2.5} (D_p/D_0)^{-3.0} \dots(3.4.3.3)$$

ただし、 $D_0$  は排出口径[m]、 $D_p$  は粒子径[m]、 $g$  は重力加速度[m/s<sup>2</sup>]、 $W$  は排出速度[kg/s]、 $\theta$  は円錐部の半頂角[deg]、 $\mu_i$  は内部摩擦係数[-]、 $\rho_b$  はかさ密度[kg/m<sup>3</sup>]。原報では内部摩擦係数  $\mu_i$  を安息角  $\phi$  で与えている( $\mu_i = \tan \phi$ )。また、推算式は cgs 単位系で与えているが、SI 単位系に換算しても同様の式になる。

### 【計算例】排出時間

かさ密度 650 kg/m<sup>3</sup>、粒子径 8.0 mm、内部摩擦角 35° の大豆 100 t が排出口径 400 mm、排出角 25° のホッパーから排出されるとき排出時間  $\tau_d$  [min] を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。(14.4 min)

$$\mu_i = \tan \phi = \tan 35^\circ = 0.70020$$

$$D_p/D_0 = 8.0/400 = 0.02 (< 0.1)$$

$$W = 0.18g^{0.5}(\mu_i \tan \theta)^{-0.32} \rho_b D_p^{2.5} (D_p/D_0)^{-2.7}$$

$$= (0.18)(9.81)^{0.5}[(0.70020)\tan 25^\circ]^{-0.32}(650)(8.0 \times 10^{-3})^{2.5}(0.02)^{-2.7} = 116.01 \text{ kg/s}$$

$$\tau_d = M/W = 100 \times 10^3 / 116.01 = 861.99 \text{ s} = 14.366 \text{ min} \doteq \boxed{14.4 \text{ min}}$$

### 【計算例】排出時間

(1) かさ密度 650 kg/m<sup>3</sup>、粒子径 5.0 mm、内部摩擦角 35° の大豆 100 t が排出口径 400 mm、排出角 25° のホッパーから排出されるとき排出時間  $\tau_d$  [min] を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。(13.1 min)

(2) かさ密度 650 kg/m<sup>3</sup>、粒子径 5.0 mm、内部摩擦角 35° の大豆 100 t が排出口径 200 mm、排出角 25° のホッパーから排出されるとき排出時間  $\tau_d$  [min] を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。(85.0 min)

## 4. 設計計算

貯蔵物 小麦 平均粒子径(比表面積径) 3 mm

比表面積形状係数	8	円錐部重量	30 t
かさ密度	0.8 t/m <sup>3</sup>	円筒部深さ-槽径比	2.62
安息角	30°	排出角	マスフロー設計に基づく最適角
内部摩擦角	30°	排出口径-槽径比	1/10
壁摩擦係数	0.4	空気圧	100 kPa
付着性	無し	溶接接手効率	0.6
貯蔵量	300 t	板厚(円筒部・円錐部)	計算値の 10 倍
貯槽型式	スカート型	重力加速度	9.81 m/s <sup>2</sup>
貯槽材	コンクリート		

①寸法設計

$$\phi_w = \tan^{-1} \mu_w = \tan^{-1} 0.4 = 21.801^\circ$$

$$\beta = (1/2)[\phi_w + \sin^{-1}(\sin \phi_w / \sin \phi_e)] = (1/2)[\phi_w + \sin^{-1}(\sin \phi_w / \sin \phi)] = (1/2)[21.801^\circ + \sin^{-1}(\sin 21.801^\circ / \sin 30^\circ)] = 34.884^\circ$$

$$\theta = 90^\circ - (1/2)\cos^{-1}[(1 - \sin \phi_e)/(2\sin \phi_e)] - \beta = 90^\circ - (1/2)\cos^{-1}[(1 - \sin \phi)/(2\sin \phi)] - \beta$$

$$= 90^\circ - (1/2)\cos^{-1}[(1 - \sin 30^\circ)/(2\sin 30^\circ)] - 34.884^\circ = 25.116^\circ \doteq \boxed{25.1^\circ}$$

$$V_b = M/\rho_b = 300/0.8 = 375 \text{ m}^3$$

$$V_T \doteq 1.1V_b = (1.1)(375) = \boxed{412.5 \text{ m}^3}$$

$$D = [(4V_b/\pi)/\{(H/D) + (1/6\tan\theta)\}]^{1/3} = [(4)(375/\pi)/\{(2.62) + (1/6\tan 25.116^\circ)\}]^{1/3} = 5.4340 \text{ m} \doteq \boxed{5.43 \text{ m}}$$

$$H = (H/D)D = (2.62)(5.4340) = 14.237 \text{ m} \doteq \boxed{14.2 \text{ m}}$$

$$L/D = 1/(2\tan\theta) = 0.5/\tan 25.116^\circ = 1.0666 \doteq 1.07$$

$$L = (L/D)D = (1.0666)(5.4340) = 5.7959 \text{ m} \doteq \boxed{5.80 \text{ m}}$$

$$D_0 = (D_0/D)D = (1/10)(5.4340) = 0.54340 \text{ m} \doteq \boxed{543 \text{ mm}}$$

②静的壁圧分布

$$h/D = H/D + L/D = 2.62 + 1.07 = 3.69 \text{ (深槽)}$$

$$\text{(円筒部)} K_a = (1 - \sin \phi)/(1 + \sin \phi) = (1 - \sin 30^\circ)/(1 + \sin 30^\circ) = 1/3$$

$$P_w = [\rho_b g D / (4\mu_w)] [1 - \exp\{- (4\mu_w K_a / D) h\}] = [(800)(9.81)(5.4340) / \{(4)(0.4)\}] [1 - \exp\{- \{(4)(0.4)(1/3) / (5.4340)\} h\}]$$

$$= (26653) [1 - \exp(-0.098147h)] \quad (P_0 = 0)$$

$$P_{w,\max} = \rho_b g D / (4\mu_w) = (800)(9.81)(5.4340) / \{(4)(0.4)\} = 26.653 \text{ kPa} \doteq \boxed{26.6 \text{ kPa}}$$

$h$ [m]	0	2	4	6	8	10	12	14	14.2	$\infty$
$P_w$ [kPa]	0.0	4.8	8.7	11.9	14.5	16.7	18.4	19.9	20.0	26.6

$$\text{(円錐部)} K = K_a \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = (1/3)\cos^2 25.116^\circ + \sin^2 25.116^\circ = 0.45343$$

$$\alpha = 2\mu_w K / \tan \theta = (2)(0.4)(0.45343) / (\tan 25.116^\circ) = 0.77381$$

$$P_0 = \rho_b g H = (800)(9.81)(14.237) = 111731 \text{ Pa} \doteq 112 \text{ kPa}$$

$$P_w = [\rho_b g L K / (\alpha - 1)] [(l/L) - (l/L)^\alpha] + P_0 = [(800)(9.81)(5.8)(0.45343) / (0.77381 - 1)] [(l/5.8) - (l/5.8)^{0.77381}] + 111731$$

$$= (-91183) [(l/5.8) - (l/5.8)^{0.77381}] + 111731$$

$$dP_w/dl = [\rho_b g L K / (\alpha - 1)] [(1/L) - \alpha (l_m/L)^{\alpha-1} (1/L)] = 0$$

$$l_m = (L^{\alpha-1} / \alpha)^{1/(\alpha-1)} = (5.8^{0.77381-1} / 0.77381)^{1/(0.77381-1)} = 1.8666 \text{ m} \doteq 1.9 \text{ m}$$

$$P_{w,\max} = [\rho_b g L K / (\alpha - 1)] [(l_m/L) - (l_m/L)^\alpha] + P_0 = (-91183) [(1.9/5.8) - (1.9/5.8)^{0.77381}] + 111731 = 120308 \text{ Pa} \doteq \boxed{120 \text{ kPa}}$$

$l$ [m]	0	1	2	3	4	5	5.8			
$P_w$ [kPa]	120	128	129	128	126	123	120			

③強度設計

$$(円筒部) t_{T1}=10t_1=10(P_{w,max}+P_a)D/(2\eta_c\sigma)$$

$$=(10)[(26653 \times 10^{-6})^{N/mm^2}+(100000 \times 10^{-6})^{N/mm^2}](5434)^{mm}/[(2)(0.6)(250)^{N/mm^2}]=22.941 \text{ mm} \doteq \boxed{22.9 \text{ mm}}$$

$$(円錐部) T_1=[P_a(\pi D^2/4)+(M+W_c)g]/[\pi D \sin(90^\circ - \theta)]$$

$$=[(100000 \times 10^{-6})^{N/mm^2}[\pi(5434)^2/4]+(300000+30000)(9.81)]/[5434\pi \sin(90^\circ - 25.116^\circ)]=359.47 \text{ N/mm}$$

$$t_1=T_1/(\eta_c\sigma)=(359.47)/[(0.6)(250)]=2.3964 \text{ mm}$$

$$T_2=[(P_{w,max}+P_a)D]/[2\sin(90^\circ - \theta)]=[(120308 \times 10^{-6}+101325 \times 10^{-6})(5434)]/[2\sin(90^\circ - 25.116^\circ)]=665.05 \text{ N/mm}$$

$$t_2=T_2/(\eta_c\sigma)=(665.05)/[(0.6)(250)]=4.4336 \text{ mm} (> t_1)$$

$$t_{T2}=10t_2=10t_1=(10)(4.4336)=44.336 \text{ mm} \doteq \boxed{44.3 \text{ mm}}$$

④排出時間

$$D_c/D_{ps}=2.3+0.071\phi^{1.8}=2.3+(0.071)(8)^{1.8}=5.2979$$

$$D_c=(D_c/D_{ps})D_{ps}=(5.2979)(3)=15.893 \text{ mm} \doteq 15.9 \text{ mm}$$

$$D_0=(D_0/D)D=(1/10)(5434)=543.4 \text{ mm} \doteq 543 \text{ mm} (> D_c)$$

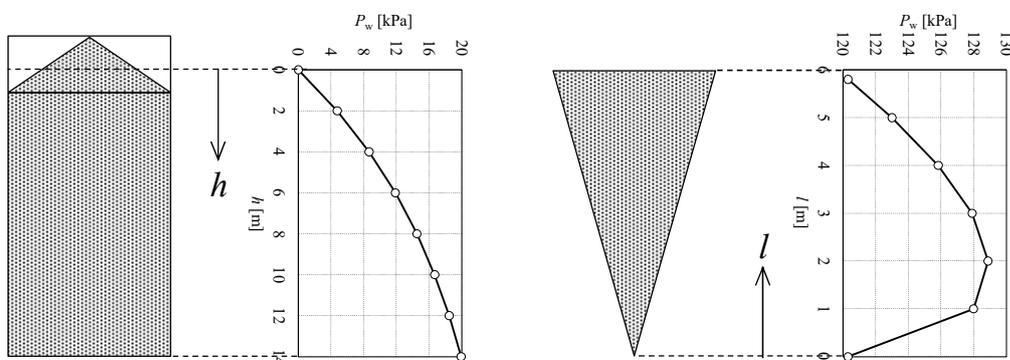
$$D_p/D_0=3/543.4=0.0055207$$

$$\mu_i=\tan\phi_i=\tan 30^\circ=0.57735$$

$$W=0.18g^{0.5}(\mu_i \tan\theta)^{-0.32}\rho_b D_p^{2.5}(D_p/D_0)^{-2.7}$$

$$=(0.18)(9.81)^{0.5}[(0.57735)\tan 25.116^\circ]^{-0.32}(800)(0.003)^{2.5}(0.0055207)^{-2.7}=0.42193 \text{ t/s} \doteq 0.422 \text{ t/s}$$

$$\tau_d=M/W=300/0.42193=711.01 \text{ s}=11.850 \text{ min} \doteq \boxed{12 \text{ min}}$$



参考文献

[1] A.W. Jenike, P.J. Elsey, R.H. Woolley; *Proc. ASTM*, **60** (1960) 1168-1181  
 [2] R.L. Brown and J.C. Richards; *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, **37** (1959)108-116  
 [3] Г.И. Покровский(ポクロフスキー); *Жур. Тех. Физ.*, **7** (1937)424-427  
 [4] И.П. Линчевский(リンチェフスキー); *Жур. Тех. Физ.*, **9** (1939)343-347  
 [5] R.L. Brown and J.C. Richards; *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, **37** (1959)108-116  
 [6] 植松時雄(著), 化学工学協会(編); 化学機械技術, 第5集(1953) p.187  
 [7] 藤田 重文, 東畑平一郎(編); 化学工学II 第2版「機械的操作」, 東京化学同人(1972) p.129-131  
 [8] 今木 清康; 粉体工学演習, コロナ社(1987)p.81  
 [9] 粉粒体供給装置委員会; 粉粒体の貯槽と供給装置, 日刊工業新聞社(1963), pp.96-99  
 [10] H.A. Janssen; *V.D.I.-Zeit*, **39** (1895) 1045-1049

- [11] ISO/TC98/SC3/WG 委員会; 粉体と工業, **24** (1992) 78
- [12] ISO/TC98/SC3/WG 委員会; 粉体と工業, **25** (1993) 61
- [13] ISO/TC98/SC3/WG 委員会; 粉体と工業, **25** (1993) 57
- [14] 林 恒美; 粉体技術ポケットブック, 工業調査会(1996)pp.225-265
- [15] C.A. Lee; *Chem. Eng.*, **60** (1953) 194-195
- [16] C.A. Lee; *Chem. Eng.*, **60** (1953) 200
- [17] C.A. Lee; *Chem. Eng.*, **61** (1954) 181
- [18] A.W. Jenike; *Chem. Eng.*, **61** (1954) 175-180
- [19] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), pp.179-181
- [20] P.A. Shamlou; *Handling of Bulk Solids*, Butterworth (1988) pp.35-42
- [21] G. Towler, R. Sinnott; *Chemical Engineering Design 2<sup>nd</sup> Ed.*, Butterworth-Heinemann (2012), Chapter 14  
Design of pressure vessels
- [22] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), pp.207
- [23] 三輪茂雄; 粉体工学通論, 日刊工業新聞社(1981), pp.126
- [24] A.W. Jenike; Bull. No.108, Uta Eng. Experimental Station, Salt Lake City (1961)
- [25] P.A. Shamlou; *Handling of Bulk Solids*, Butterworth (1988) p.60
- [26] 粉粒体供給装置委員会; 粉粒体の貯槽と供給装置, 日刊工業新聞社(1963), pp.53-69
- [27] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), p.164
- [28] 三輪茂雄; 粉体工学通論, 日刊工業新聞社(1981), p.110
- [29] R.N. Langmaid and H.E. Rose; *J. Inst. Fuel.*, **30** (1957)166
- [30] G.C. Gardner; *Chem. Eng. Sci.*, **17** (1962) 1079
- [31] G.C. Gardner; *Chem. Eng. Sci.*, **18** (1963) 35
- [32] G.C. Gardner; *Chem. Eng. Sci.*, **19** (1964) 283
- [33] 化学工学協会(編); 化学工学演習 1, 丸善(1969) p.168
- [34] 田中達夫, 川合清一; 化学工学, **20** (1956) 144-147

令和5年9月22日 作成

令和6年5月10日 改訂