

材料力学の基礎

化学工学の設計計算と言え、蒸留塔の高さや反応器の装置容積などが想起される。これらは、理論段数や反応時間など、装置性能に関わる設計因子に基づいて決められることから、**性能設計**と呼ばれる。そのほか、外気からの風圧や内部圧に耐えるには蒸留塔の壁の肉厚を何ミリにすればよいか、反応器本体を支える土台や攪拌軸にかかる力ほどのくらいかといった、いわゆる**構造設計**が必要となる。このあたりの設計理論は、**材料力学**に基づき体系化されている。材料力学とは、ある部材が外力を受けたとき、どのくらいの力が部材の内部にかかり、どの程度部材が変形するのかを計算する学問である。このように、化学装置の設計は、本来、性能設計(化学工学)と構造設計(機械工学)の両面から行うものである。

大正から昭和初期にかけての化学工学は、**化学機械学**と呼ばれ、単一の化学装置を設計するための学問、という意味合いが強かった。戦後は、石油化学コンビナートのように、個々の化学装置を連結する必要が出てきて、一連の化学プラント群をシステムとして扱う**プロセスシステム工学**が発達した。そういうわけで、現在の化学工学は、「木(単一の化学装置)」を見ることも「森(プロセス全体)」を見ることもできる学問体系として確立されている。かつての化学機械学は、狭い意味での化学工学と言える。

材料力学の成書[文献 1~8]を参考にした。

1. 応力とひずみ

1. 1 外力と内力

部材に対して外から加わる力を**外力**という。外力の種類には、部材に負荷を与える**荷重(かじゅう)**と部材を支える**反力**がある。荷重の種類には、**引張**、**圧縮**、**せん断**などがあり、部材の一点に外力がかかる**集中荷重**と、部材全体に外力がかかる**分布荷重**とに区別される。分布荷重は、部材の自重のように位置によらずどこも等しく外力がかかる場合と、水圧のように位置によって外力の大きさが異なる場合とがある。部材に外力を加えると、部材の内部で外力につり合う力が生じる。これを**内力**といい、[N]の単位で表される。実用上は、単位面積あたりの内力、すなわち**応力**が用いられる。単位は、[N/m²]または[Pa]である。応力には、部材内部の断面に対して垂直に作用する**垂直応力**(あるいは、**鉛直応力**)と、水平に作用する**せん断応力**がある。

1. 2 応力

いま、丸棒が外力 P [N] で両端から垂直方向に引っ張られているとする。この場合の丸棒に作用する外力は、**引張荷重**とよばれる。このとき、部材内部のある位置で切り出した仮想的な断面では、部材断面積あたりの荷重、すなわち応力が仮想断面に対して垂直かつ一様に分布して外力とつり合いを保っている。この場合の応力は、垂直応力となる。上と下の仮想断面にはたらく垂直応力の方向は、それぞれ荷重と反対の方向になる。かりに同じ向きだと、仮想断面から部材が上と下とに勝手に分裂して移動してしまうことになる。そのようなことは、現実には起こらない。自分で鉛筆の両端を持って両手で引っ張ってみた

ところで、鉛筆が自然と上と下へ分裂していくはずはないのだから。部材の断面積を A [m²] とすると、垂直応力 σ [N/m²] は、次式で表される。

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \dots(1.2.1)$$

引張の方向とは反対に、丸棒が上下から押さえつけられている場合の外力と部材内部に作用する応力は、それぞれ**圧縮荷重・圧縮応力**と呼ばれる。

いま、横たわった丸棒を上と下から外力 P [N] ではさみこんで、ずらそうとしている。(部材を平行四辺形状にゆがませようとしている。ハサミで切ろうとするのと同じ状況。刃の当たる位置が外力の作用点となる。) この場合の丸棒に作用する外力は、**せん断荷重**とよばれる。このとき、部材内部のある位置で切り出した仮想的な断面では、応力が仮想断面に対して水平かつ一様に分布して外力とつり合いを保っている。この場合の応力は、**せん断応力**となる。せん断応力 τ [N/m²] は、次式で表される。

$$\tau = \frac{P}{A} \quad \dots(1.2.2)$$

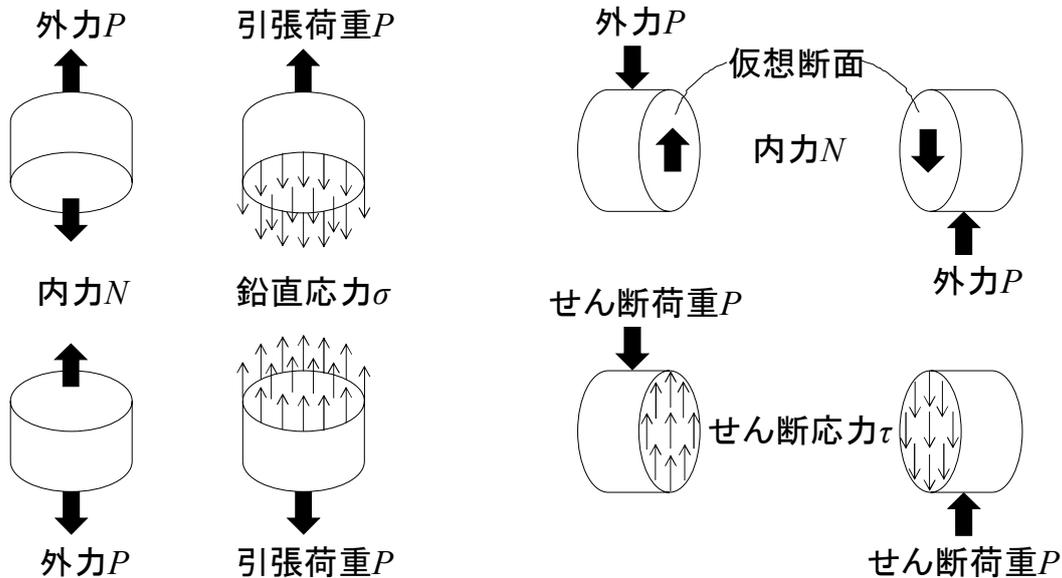


図 1.2.1 応力の説明図
(左)鉛直応力、(右)せん断応力

1. 3 ひずみ

部材単位長さあたりの伸び量を**ひずみ**といい、元の寸法からの変形量を意味する。長さ l [m] の丸棒に対して縦方向に引張荷重を作用させたとき、 Δl だけ伸びた場合の**縦ひずみ** ε [-] は、次式で表される。

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \dots(1.3.1)$$

横方向は、荷重方向に対して垂直に縮むことになる。幅 b [m] の丸棒が Δb だけ縮んだ場合の**横ひずみ** ε' [-] は、次式で表される。

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} \quad \cdots(1.3.2)$$

縦ひずみ ε と横ひずみ ε' の比をポアソン比 ν [-] といひ、部材の材質に依存する。

$$\nu = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \quad \cdots(1.3.3)$$

$$\boxed{\nu = -\frac{\Delta\ell/\ell}{\Delta b/b}} \quad \cdots(1.3.4)$$

負号を付す理由は、 Δb が負となるためである。負号の代わりに絶対値で定義しているものもある。鉄鋼材料のポアソン比は、0.3 程度である。

片方の端が固定された丸棒の先端にせん断荷重を作用させたとき、 $\Delta\ell$ だけ部材がずれた場合のせん断ひずみ γ [-] は、次式で表される。

$$\gamma = \frac{\Delta\ell}{\ell} \quad \cdots(1.3.5)$$

ひずみ角 θ [rad] の正接(tan)は、次式で表される。

$$\tan \theta = \frac{\Delta\ell}{\ell} (= \gamma) \quad \cdots(1.3.6)$$

$\tan \theta$ のテーラー展開は、次式で表される。

$$\tan \theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \cdots \quad \cdots(1.3.7)$$

一般に、 θ は非常に小さいことから、上式より $\tan \theta \approx \theta$ が成り立つ。

$$\theta = \gamma \quad \cdots(1.3.8)$$

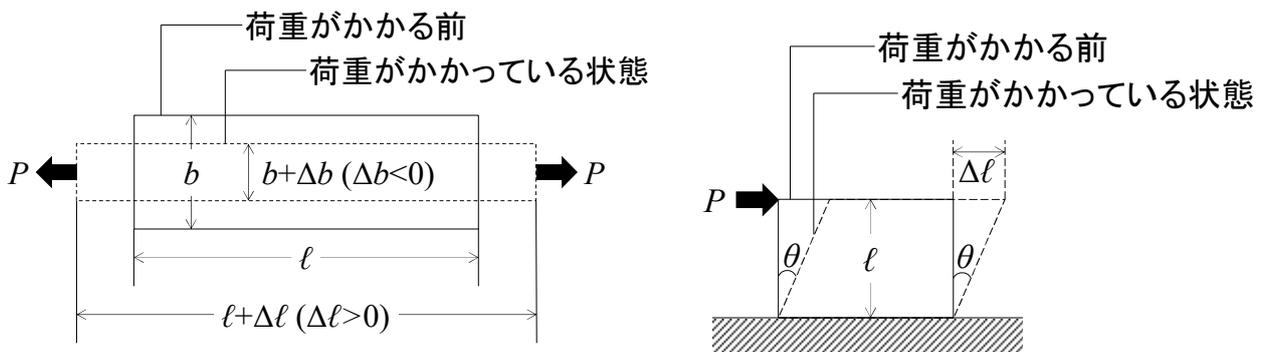


図 1.3.1 ひずみの説明図
(左)縦ひずみと横ひずみ、(右)せん断ひずみ

1. 4 フックの法則

吊り下げた部材に対して鉛直下向き方向に引張荷重 P を加えたとき、部材が $\Delta\ell$ だけ伸びたとする。この伸び量は、荷重に比例することから、 k を比例定数として次式で表される。

$$P = k\Delta\ell \quad \cdots(1.4.1)$$

引張荷重 P の式と縦ひずみ ε の式を用いると、次式のようになる。

$$\sigma A = k \varepsilon \ell \quad \cdots(1.4.2)$$

$$\boxed{\sigma = E \varepsilon} \left[E \equiv \frac{k \ell}{A} \right] \quad \cdots(1.4.3)$$

E は縦弾性係数(あるいは、ヤング率)[N/m²]であり、部材の材質に依存する。

上式のように、部材内部にかかる鉛直応力 σ と部材のひずみ ε は、比例関係にある。これをフックの法則という。

せん断ひずみの場合と同じように、片方の端が固定された部材にせん断荷重 P を加えたとき、部材が $\Delta \ell$ だけずれたとする。このずれ量は、荷重に比例することから、次式で表される。

$$P = k \Delta \ell \quad \cdots(1.4.4)$$

せん断荷重 P の式とせん断ひずみ γ の式を用いると、次式のようになる。

$$\tau A = k \gamma \ell \quad \cdots(1.4.5)$$

$$\boxed{\tau = G \gamma} \left[G \equiv \frac{k \ell}{A} \right] \quad \cdots(1.4.6)$$

G は横弾性係数(あるいは、剛性率)[N/m²]であり、部材の材質に依存する。

表 1.4.1 おもな工業材料の弾性係数[文献 5]
(文献によって値が異なる。ここでは下表の値を用いること。)

材料	縦弾性係数 E [GPa]	横弾性係数 G [GPa]	ポアソン比 ν [-]
軟鋼	206	82	0.29
鋳鉄	157	61	0.26
銅	123	46	0.34
黄銅	100	37	0.35
アルミニウム	73	26	0.34
ガラス	71	29	0.35

1.5 応力-ひずみ線図

軟鋼材からなる、断面形状が一樣の棒の両端に引張荷重をゆっくりと加えてゆく(引張試験)。比例限度(点 A)に達するまでは、応力とひずみが比例関係にある。弾性限度(点 B)までは、応力を解除することで、ひずみ(部材の変形)がもとに戻る。外力と取り去ると元の形状に戻る性質を弾性といい、戻らない性質を塑性という。さらに荷重をかけてゆくと、応力はあまり変化しないが、ひずみが急激に増大する現象が起こる。これを降伏といい、降伏が起こる点を降伏点(点 C および点 D)という。降伏点には、上(じょう)降伏点(点 C)と下(か)降伏点(点 D)があり、たんに降伏点という場合は、上降伏点を指す。一般には、部材の応力が降伏点を超過しないように設計を行うが、軟鋼材以外の部材では、明確な降伏点が出ないものもある。その場合は、0.2%のひずみが残る点(耐力という)を設計の基準値とする。さらに荷重をかけてゆくと、やがて最大応力に達する。この点を引張強さまたは極限強さ(点 E)という。それ以降は、棒の局部でくびれが生じて、そこに応力が集中し、やがて破断する。破断が起こる点を破断強さ(点 F)という。

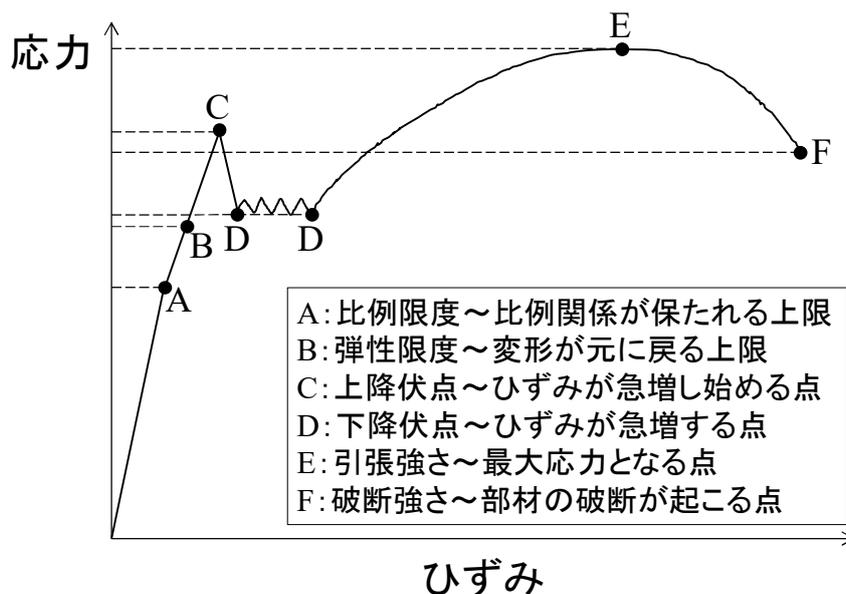


図 1.5.1 応力-ひずみ線図

1. 6 許容応力

機械類は、使用時にかかる引張荷重に対して部材の強度が十分となるように設計される。また、荷重が解消された後も、ひずみが残らないようにしている。安全が保証される引張荷重の最大値(ここまでの荷重ならば、かけても十分に安全)を許容応力 σ_a [Pa] という。いま、部材に生じる引張応力が σ [Pa] であるとき、部材が安全であるには次式が成り立つ必要がある。

$$\sigma \leq \sigma_a \quad \cdots(1.6.1)$$

許容応力 σ_a は、降伏点や引張強さなどの基準応力 σ_s [Pa] に基づき、それよりも十分に余裕を持たせて(値を小さくして)設定される。工学的には、余裕分に相当する安全率 f [-] を基準応力より割り算して決定される。

$$\sigma_a = \frac{\sigma_s}{f} \quad [f > 1.0] \quad \cdots(1.6.2)$$

f が大きいほど設計上の余裕がある(機械的強度が高い)。どの程度余裕を持たせるか(f をいくりにするか)は、その製品の設計者が決める。一般には、静荷重がかかる場合は 1 桁、衝撃荷重がかかる場合は 2 桁を取る。

2. はりの曲げ

2. 1 せん断力と曲げモーメント

荷重を受けて曲げられる細い棒をはりという。いま、横たわったはりの両端がそれぞれ上向きの反力 R_A [N] と R_B [N] で支えられており、上から集中荷重 P [N] がかけられているものとする。このような状態

のほりを、両端単純支持はりという。

垂直方向の力のつり合いは、次式で表される。

$$P = R_A + R_B \quad \cdots(2.1.1)$$

点 A まわりの力のモーメントのつり合いは、次式で表される

$$aP = \ell R_B \quad \cdots(2.1.2)$$

上式より反力 R_A および R_B を得る。

$$R_B = \frac{aP}{\ell} \quad \cdots(2.1.3)$$

$$R_A = P - R_B = \left(1 - \frac{a}{\ell}\right)P = \left(\frac{\ell - a}{\ell}\right)P = \frac{b}{\ell}P \quad \cdots(2.1.4)$$

$$R_A = \frac{bP}{\ell} \quad \cdots(2.1.5)$$

①AC 間($0 \leq x \leq a$)の場合 仮想的に切り出した断面 X-X の左側断面 X+にかかるせん断力 F_X [N](せん断応力[N/m²]とは異なる)は、上向きの力を正、下向きの力を負として、作用・反作用の法則より次式で表される。

$$F_X = R_A \quad \cdots(2.1.6)$$

R_A の式を代入すると、次式となる。

$$F_X = \frac{bP}{\ell} \quad (0 \leq x \leq a) \quad \cdots(2.1.7)$$

曲げによって部材内部に作用するモーメント(回転力)を曲げモーメントといい、内力により生じる。はりの長さ x の部分は、時計まわりに R_{AX} のモーメントを受けていることから、断面 X+の部分では、回転しないように反時計まわりに R_{AX} のモーメントを生じている。これがはりの断面 X+にかかる曲げモーメントとなる。両方のモーメントは、互いに協力しあって、はりを下に凸とする方向に働きかけている。この方向に作用する曲げモーメントを正と定義する。一方、はりを上に凸とする方向に作用する曲げモーメントを負と定義する。

断面 X+にかかる曲げモーメント M_X [N・m]は、次式で表される。

$$M_X = R_A x \quad \cdots(2.1.8)$$

R_A の式を代入すると、次式となる。

$$M_X = \frac{bP}{\ell} x \quad (0 \leq x \leq a) \quad \cdots(2.1.9)$$

②CB 間($a \leq x \leq \ell$)の場合 仮想的に切り出した断面 Y-Y の左側断面 Y+にかかるせん断力 F_Y [N]は、上向きの力を正、下向きの力を負として、作用・反作用の法則より次式で表される。

$$F_Y = R_A - P \quad \cdots(2.1.10)$$

R_A の式を代入すると、次式となる。

$$F_Y = \frac{bP}{\ell} - P = \left(\frac{b - \ell}{\ell}\right)P = -\frac{aP}{\ell} \quad \cdots(2.1.11)$$

$$F_Y = -\frac{aP}{\ell} \quad (a \leq x \leq \ell) \quad \cdots(2.1.12)$$

負号は、せん断力 F_Y の向きが下向きであることを表している。

はりの長さ x の部分は、時計まわりに $R_A x$ のモーメントを受けている。これに対して、断面 Y+では、はりが回転しないように反時計まわりに $R_A x$ のモーメントを生じている。両方のモーメントは、互いに協力しあって、はりを下に凸とする方向に働きかけている。したがって、長さ x の部分に対応する曲げモーメントは、正である($+R_A x$)。一方、長さ $(x-a)$ の部分は、反時計回りに $P(x-a)$ のモーメントを受けている。これに対して、断面 Y+では、はりが回転しないように時計まわりに $P(x-a)$ のモーメントを生じている。両方のモーメントは、互いに協力しあって、はりを上に凸とする方向に働きかけている。したがって、長さ $(x-a)$ の部分に対応する曲げモーメントは、負である($-P(x-a)$)。以上より、断面 Y+の部材部分にかかる曲げモーメント M_Y [N・m]は、両者の和で表される。

$$M_Y = (+R_A x) + \{-P(x-a)\} = R_A x - P(x-a) \quad \cdots(2.1.13)$$

R_A の式を代入すると、次式となる。

$$M_Y = \frac{bP}{\ell} x - P(x-a) = \frac{bP}{\ell} x - Px + aP = \left(\frac{b-\ell}{\ell}\right) Px + aP = -\frac{aP}{\ell} x + aP = aP \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad \cdots(2.1.14)$$

$$M_Y = aP \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad (a \leq x \leq \ell) \quad \cdots(2.1.15)$$

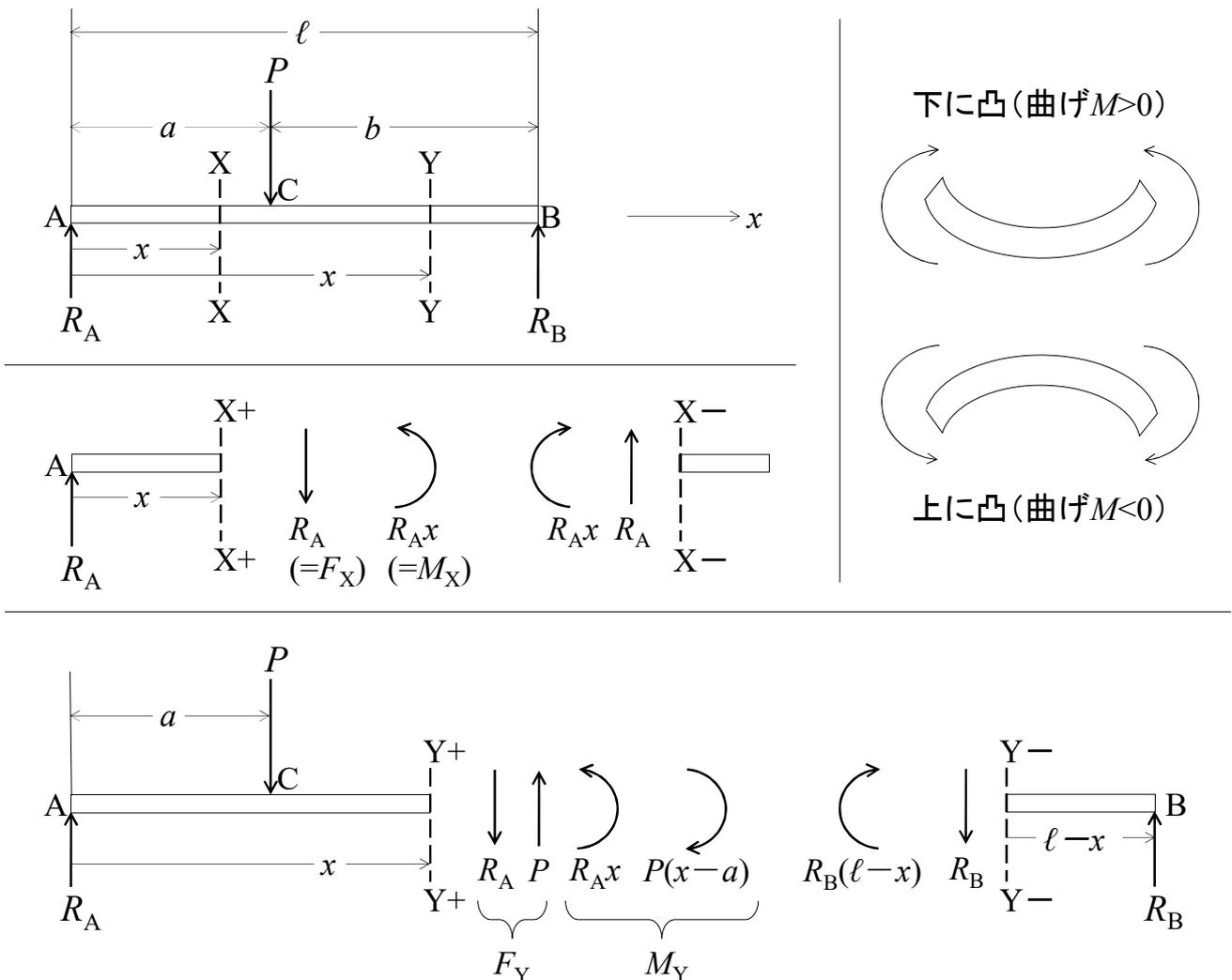


図 2.1.1 両端単純支持はりの解析[文献 5]

2. 2 曲げ応力

はりを下に凸の向きに曲げると、曲げの内側はもとの長さよりも短くなり、外側は長くなる。その中間には、もとの長さと変わらない**中立面**が存在する。中立面に対して垂直に切り出した仮想断面を見ると、中立面の箇所は一本の線になって見える。この線を**中立軸**という。中立軸を境に、上向きに圧縮応力(→←)が、下向きに引張応力(←→)がそれぞれ作用する。このことは、曲げの内側と外側の変形を考えると理解できる。曲げに伴い生じる垂直応力を**曲げ応力**という。

線分 P_0Q_0 が弧長 PQ に変形したときのひずみ ε は、次式で表される。

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{PQ - P_0Q_0}{P_0Q_0} = \frac{PQ - N_0M_0}{N_0M_0} = \frac{PQ - NM}{NM} \quad \cdots(2.2.1)$$

弧長 PQ と NM は、それぞれ次式で表される。

$$PQ = 2\pi(\rho + y) \times \frac{\theta}{2\pi} = (\rho + y)\theta \quad \cdots(2.2.2)$$

$$NM = 2\pi\rho \times \frac{\theta}{2\pi} = \rho\theta \quad \cdots(2.2.3)$$

ただし、 y は中立面からの距離[m]、 θ は中心角[rad]、 ρ は中立面までの曲率半径[m]。

ε の式に代入すると、次式のようになる。

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = \frac{y}{\rho} \quad \cdots(2.2.4)$$

位置 y における曲げ応力 σ [N/m²] は、フックの法則を用いて次式で表される。

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho} \quad \cdots(2.2.5)$$

$$\boxed{\sigma = \frac{Ey}{\rho}} \quad \cdots(2.2.6)$$

ただし、 E は縦弾性係数またはヤング率[N/m²]。

いま、仮想断面上の中立軸から位置 y だけ離れたところに微小断面積 dA をとる。仮想断面全体の合力は、圧縮分と引張分の和で 0 となることから、次式が成り立つ。

$$\int \sigma dA = 0 \quad \cdots(2.2.7)$$

σ の式を代入すると、次式のようになる。

$$\int \frac{Ey}{\rho} dA = 0 \quad \cdots(2.2.8)$$

$$\boxed{\int y dA = 0} \quad \cdots(2.2.9)$$

左辺のように、座標値と段面積の積でモーメント(回転力)を表したものを**断面一次モーメント**という。断面一次モーメントが 0 となる座標を**図心**という。上式は、中立軸が断面の図心を通ることを表している。

微小断面積 dA に作用する曲げ応力 σdA に距離 y を乗じて断面全体にわたって積分したものは、曲げモーメント M に等しい。

$$M = \int y \sigma dA \quad \cdots(2.2.10)$$

σ の式を代入すると、次式のようになる。

$$M = \int y \frac{Ey}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z \quad \cdots(2.2.11)$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}} \quad \left[I_z \equiv \int y^2 dA \right] \quad \cdots(2.2.12)$$

ただし、 I_z は断面二次モーメントであり、部材の断面形状に依存する。 EI_z を曲げ剛性という。

曲げ応力 σ の式に上式を代入して ρ を消去すると、曲げモーメントを含む曲げ応力の式を得る。

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho} = Ey \frac{M}{EI_z} = \frac{M}{I_z} y \quad \cdots(2.2.13)$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{I_z} y} \quad \cdots(2.2.14)$$

引張応力 σ は、中立軸から断面最下部までの距離 $y=e_1$ において最大値 σ_{\max} をとる。また、中立軸から断面最上部までの距離 $y=-e_2$ において最小値 σ_{\min} をとる。

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} e_1 = \frac{M}{Z_1} \quad \left[Z_1 \equiv \frac{I_z}{e_1} \right] \quad \cdots(2.2.15)$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{M}{I_z} e_2 = -\frac{M}{Z_2} \quad \left[Z_2 \equiv \frac{I_z}{e_2} \right] \quad \cdots(2.2.16)$$

Z_1 と Z_2 を断面係数という。

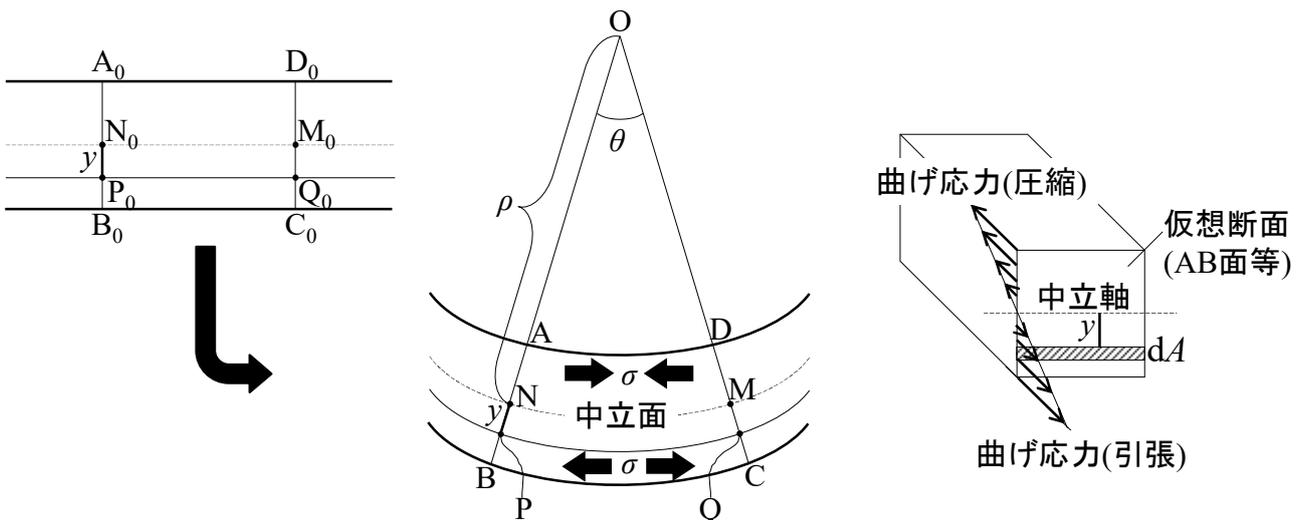


図 2.2.1 曲げ応力の説明図 [文献 5]

3. はりのたわみ

3. 1 たわみの基礎式

はりが曲げられるときの軸線、すなわち中立面を横から見た曲線をたわみ曲線という。以下、たわみ y およびたわみ角 α を求めるための基礎式を導く。点 C を中心とする曲率円の半径 ρ [m] の逆数は、曲率円上の二つの接点 A および B を結ぶ中心角 $\Delta\theta$ [rad] をなす扇形 CAB の弧長 Δl [m] を用いて表される。

$$\Delta l = 2\pi\rho \times \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \rho\Delta\theta \quad \cdots(3.1.1)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta\theta}{\Delta l} \quad \cdots(3.1.2)$$

微小弧長 Δl は、線分 AB を斜辺とする直角三角形の斜辺と見なすことができる。接点 A と B の直角座標をそれぞれ $A(x, y)$ 、 $B(x+\Delta x, y+\Delta y)$ とすると、三平方の定理より次式が成り立つ。

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \quad \cdots(3.1.3)$$

曲率円上の点 A および点 B を通る接線と x 軸の間の角をそれぞれ α (たわみ角) および β とするとき、中心角 $\Delta\theta$ はこれらの差に等しい。

$$\Delta\theta = \alpha - \beta \quad (\alpha > \beta) \quad \cdots(3.1.4)$$

上式の正接(tan)を取ると、加法定理を用いて次式のように導かれる。

$$\tan(\Delta\theta) = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \quad \cdots(3.1.5)$$

$$\tan(\Delta\theta) = \frac{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta} \quad \cdots(3.1.6)$$

$$\tan(\Delta\theta) = \left[\frac{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} \right] \bigg/ \left[\frac{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} \right] \quad \cdots(3.1.7)$$

$$\tan(\Delta\theta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} \quad \cdots(3.1.8)$$

$\tan(\Delta\theta)$ のテーラー展開は、次式で表される。

$$\tan(\Delta\theta) = \Delta\theta + \frac{1}{3}(\Delta\theta)^3 + \frac{2}{15}(\Delta\theta)^5 + \cdots \quad \cdots(3.1.9)$$

中心角 $\Delta\theta$ が十分に小さいとき、上式より次式が成り立つ。

$$\tan(\Delta\theta) \approx \Delta\theta \quad \cdots(3.1.10)$$

$\tan(\Delta\theta)$ の式は、次式となる。

$$\Delta\theta = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} \quad \cdots(3.1.11)$$

正接項は、はりのたわみ曲線 $y=f(x)$ を通る点 A および B の接線の傾きを表すことから、次式で表される。

$$\tan\alpha = f'(x) \quad \cdots(3.1.12)$$

$$\tan \beta = f'(x + \Delta x) \quad \cdots(3.1.13)$$

$\Delta \theta$ の式に代入すると、次式のようにになる。

$$\Delta \theta = \frac{f'(x) - f'(x + \Delta x)}{1 + f'(x)f'(x + \Delta x)} = -\frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{1 + f'(x + \Delta x)f'(x)} \quad \cdots(3.1.14)$$

Δl の式と上式を $1/\rho$ の式に代入すると、次式のようにになる。

$$\frac{1}{\rho} = -\left[\frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{1 + f'(x + \Delta x)f'(x)} \right] \bigg/ \left[\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} \right] \quad \cdots(3.1.15)$$

$$\frac{1}{\rho} = -\left[\frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \right] \bigg/ \left[\{1 + f'(x + \Delta x)f'(x)\} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} \right] \quad \cdots(3.1.16)$$

Δx を限りなく 0 に近づけると、導関数の定義式を用いて次式のようにになる。

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{df'(x)}{dx} \bigg/ \left[[1 + \{f'(x)\}^2] \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right] \quad \cdots(3.1.17)$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 y}{dx^2} \bigg/ \left[\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right] \quad \left(f' \equiv \frac{dy}{dx} \right) \quad \cdots(3.1.18)$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 y}{dx^2} \bigg/ \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \quad \cdots(3.1.19)$$

たわみが十分に小さい場合は、 $dy/dx \ll 1$ が成り立つことから、上式は近似的に次式となる。

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 y}{dx^2} \quad \cdots(3.1.20)$$

曲げモーメント M を含む $1/\rho$ の式を上式に代入すると、**たわみの基礎式**を得る。

$$\boxed{-\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI_z}} \quad \cdots(3.1.21)$$

上式を 2 回積分すると、たわみ y を得る。

$$\frac{dy}{dx} = \int -\frac{M}{EI_z} dx + C_1 \quad \cdots(3.1.22)$$

$$\boxed{y = \int \left(\int -\frac{M}{EI_z} dx \right) dx + C_1 + C_2} \quad \cdots(3.1.23)$$

ただし、 C_1 と C_2 は積分定数。

たわみ角 α は、次式で表される。

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \quad \cdots(3.1.24)$$

α が十分に小さい場合は、上で述べた手順にしたがって近似的に次式が成り立つ。

$$\alpha = \frac{dy}{dx} \quad [\tan\alpha \approx \alpha] \quad \cdots(3.1.25)$$

dy/dx の式を代入すると、たわみ角 α を得る。

$$\alpha = \int -\frac{M}{EI_z} dx + C_1 \quad \cdots(3.1.26)$$

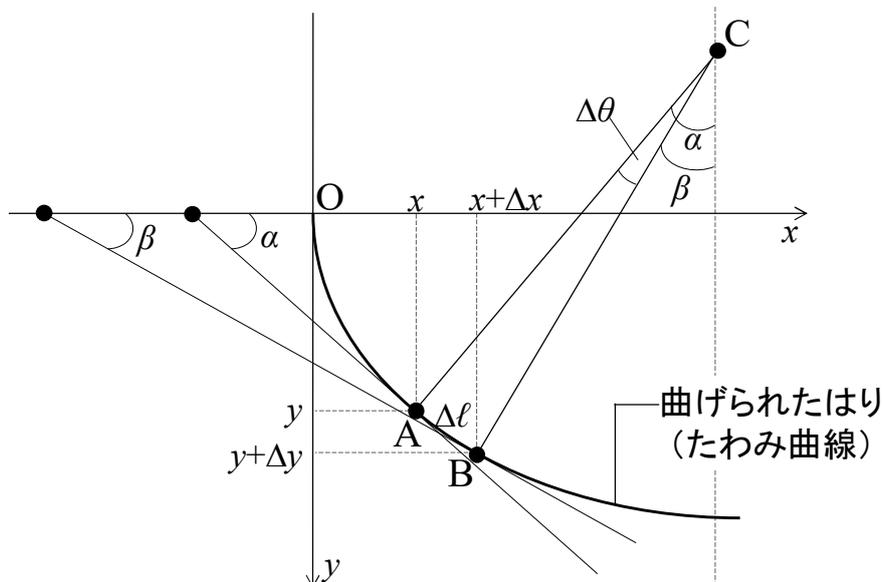


図 3.1.1 はりのたわみ

3. 2 片持はり

自由端に集中荷重 W [N] を受ける長さ l [m] の片持(かたもち)はりのたわみとたわみ角を求める。はりの長さ x の部分は、反時計まわりに Wx のモーメントを受けている。これに対して、仮想断面の左側 $X+$ では、はりが回転しないように時計まわりに Wx のモーメントを生じている。両方のモーメントは、互いに協力しあって、はりを上に凸とする方向に働きかけている。したがって、長さ x の部分に対応する曲げモーメント M_x [N・m] は、負である ($-Wx$)。

$$M_x = -Wx \quad \cdots(3.2.1)$$

たわみの基礎式に代入すると、次式となる。

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI_z} = -\frac{W}{EI_z} x \quad \cdots(3.2.2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W}{EI_z} x \quad \cdots(3.2.3)$$

積分すると、次式となる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{2EI_z} x^2 + C_1 \quad \cdots(3.2.4)$$

はりの固定端($x=l$)では、たわみは起こらないことから($dy/dx=0, y=0$)、積分定数 C_1 を得る。

$$0 = \frac{W}{2EI_z} \ell^2 + C_1 \quad \left[x = \ell, \frac{dy}{dx} = 0 \right] \quad \cdots(3.2.5)$$

$$C_1 = -\frac{W}{2EI_z} \ell^2 \quad \cdots(3.2.6)$$

dy/dx の式に代入すると、たわみ角 α を与える式を得る。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{2EI_z} x^2 - \frac{W}{2EI_z} \ell^2 = \frac{W}{2EI_z} (x^2 - \ell^2) [= \tan \alpha \approx \alpha] \quad \cdots(3.2.7)$$

$$\alpha = \frac{W}{2EI_z} (x^2 - \ell^2) \quad \cdots(3.2.8)$$

たわみ角 α は、自由端の位置($x=0$)で最大値 α_{\max} をとる。

$$\alpha_{\max} = -\frac{W \ell^2}{2EI_z} \quad \cdots(3.2.9)$$

dy/dx の式をもう一度積分すると、次式のようになる。

$$y = \frac{W}{2EI_z} \left(\frac{x^3}{3} - \ell^2 x \right) + C_2 \quad \cdots(3.2.10)$$

はりの固定端($x=\ell$)では、たわみは起こらないことから($dy/dx=0, y=0$)、積分定数 C_2 を得る。

$$0 = \frac{W}{2EI_z} \left(\frac{\ell^3}{3} - \ell^3 \right) + C_2 = \frac{W}{2EI_z} \left(-\frac{2\ell^3}{3} \right) + C_2 = -\frac{W \ell^3}{3EI_z} + C_2 \quad [x = \ell, y = 0] \quad \cdots(3.2.11)$$

$$C_2 = \frac{W \ell^3}{3EI_z} \quad \cdots(3.2.12)$$

y の式に代入すると、片持はりのたわみを表す式を得る。

$$y = \frac{W}{2EI_z} \left(\frac{x^3}{3} - \ell^2 x \right) + \frac{W \ell^3}{3EI_z} \quad \cdots(3.2.13)$$

$$y = \frac{W}{6EI_z} (x^3 - 3\ell^2 x + 2\ell^3) \quad \cdots(3.2.14)$$

たわみ y は、自由端の位置($x=0$)で最大値 y_{\max} をとる。

$$y_{\max} = \frac{W \ell^3}{3EI_z} \quad \cdots(3.2.15)$$

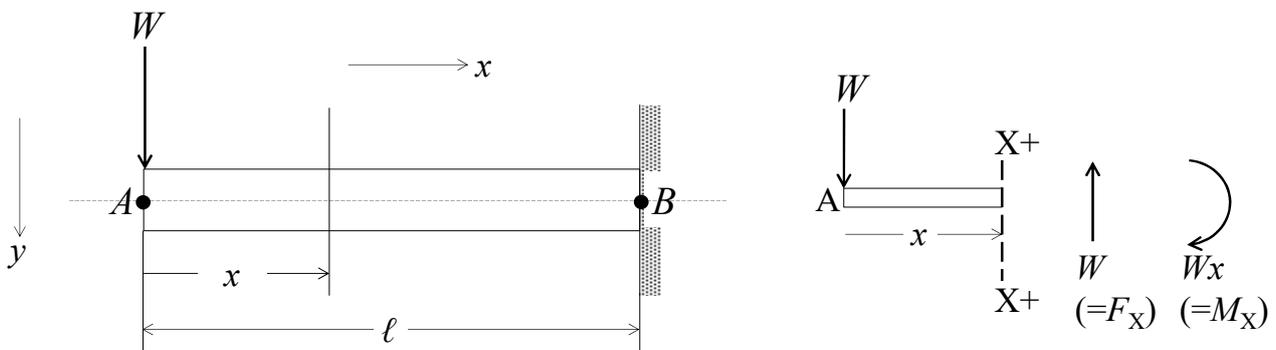


図 3.2.1 片持はりの解析

4. 軸のねじり

4. 1 ねじり応力

一端が水平に固定された半径 r の中実丸棒(ちゅうじつまるぼう、中身の詰まった丸棒)があり、何らかの方法で外力を加えてねじることを考える。たとえば、丸棒の右側か左側にひもをつけて外力 F で下に引く場合が考えられる。この場合、丸棒は回転力 $T=r \times F$ でねじられることになる。また、親指と人差し指で丸棒をつまんでねじる場合も考えられる。親指と人差し指で同じ回転方向に外力 F ずつ作用させたとき、丸棒は回転力 $T=r \times (2F)$ でねじられることになる。これらの回転力を、トルクあるいはねじりモーメントといい、力と距離の積[N・m]で表される。トルクやモーメントという言葉は、回転力という言葉に置き換えると理解しやすい。

いま、長さ l [m]、半径 r [m] の丸棒をねじり角 Θ [rad] だけねじる(シータ Θ は、 θ の大文字)。このとき、丸棒の微小側面 $abcd$ は、平行四辺形 $ab'c'd$ のように変形する(ひずみが生じる)。丸棒全体で考えれば、側面を線分 AB で切ってはがして広げると、ねじる前は長方形 $ABCD$ であったものが、ねじると平行四辺形 $AB'C'D$ のように変形することになる。この場合の部材に生じる応力の種類はせん断応力であり、とくにねじり応力とよばれる。ねじり応力が作用することにより部材に生じるせん断ひずみ γ [-] は、次式で表される。

$$\gamma = \frac{\Delta l}{l} = \frac{r\Theta}{l} \quad \cdots(4.1.1)$$

上式の $r\Theta$ は、扇形 OBB' の弧長 BB' である。

$$BB' = 2\pi r \times \frac{\Theta}{2\pi} = r\Theta \quad \cdots(4.1.2)$$

ねじり応力 τ [N・m] は、次式となる。

$$\tau = G\gamma = \frac{Gr\Theta}{l} = Gr\theta \quad \cdots(4.1.3)$$

$$\boxed{\tau = Gr\theta} \quad \left[\theta \equiv \frac{\Theta}{l} \right] \quad \cdots(4.1.4)$$

ただし、 θ は比ねじり角[rad/m]。

ねじり応力 τ は、部材の半径方向距離 r と比例関係にあり、 $r=R$ において最大ねじり応力 τ_{\max} をとる。

$$\boxed{\tau_{\max} = GR\theta} \quad \cdots(4.1.5)$$

なお、せん断角 ϕ [rad] について、近似的に次式が成り立つ。

$$\tan \phi \approx \frac{r\Theta}{l} \quad \cdots(4.1.6)$$

すでに述べたように、 θ が非常に小さい場合は $\tan \phi \approx \phi$ が成り立ち、ひずみ γ と等しくなる。

$$\tan \phi \approx \phi (= \gamma) \approx \frac{r\Theta}{l} = r\theta \quad \cdots(4.1.7)$$

$$\boxed{\gamma \approx r\theta} \quad \cdots(4.1.8)$$

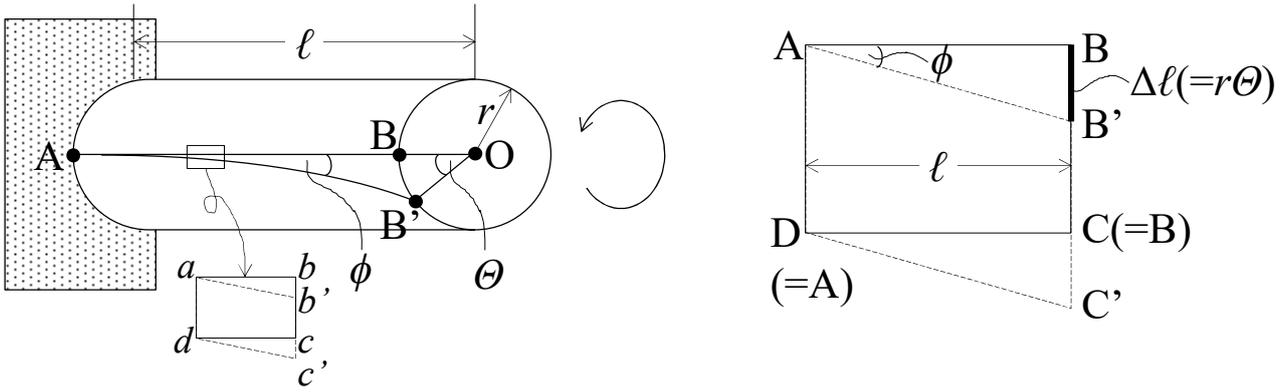


図 4.1.1 軸のねじりの説明図

4. 2 トルクと断面二次極モーメント

丸棒(半径 R [m], 直径 D [m])の微小断面積 dS [m^2]に作用する微小トルク dT は、ねじりに伴う内力 τdS [N]と中心からの距離 r の積で表される。

$$dT = \tau r dS \quad \cdots(4.2.1)$$

ねじり応力 τ の式を代入して積分すると、次式のようになる。

$$dT = Gr^2 \theta dS \quad \cdots(4.2.2)$$

$$T = G\theta \int r^2 dS = G\theta I_p \quad \cdots(4.2.3)$$

$$\boxed{T = G\theta I_p} \quad \left[I_p \equiv \int r^2 dS \right] \quad \cdots(4.2.4)$$

ただし、 I_p は断面二次極モーメントであり、部材の断面形状に依存する。

上式を用いて τ_{\max} の式の $G\theta$ 項を消去すると、 τ_{\max} は次式のように導かれる。

$$\frac{\tau_{\max}}{T} = \frac{GR\theta}{G\theta I_p} = \frac{R}{I_p} \quad \cdots(4.2.5)$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p/R} = \frac{T}{Z_p} \quad \cdots(4.2.6)$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{T}{Z_p}} \quad \left[Z_p \equiv \frac{I_p}{R} \right] \quad \cdots(4.2.7)$$

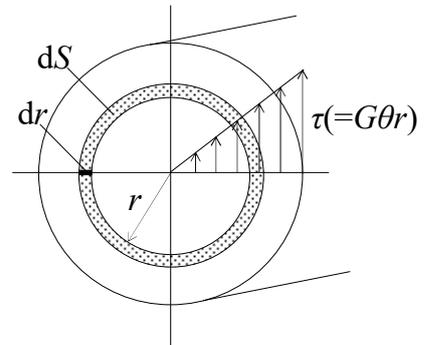
ただし、 Z_p は極断面係数であり、部材の断面形状に依存する。

中実丸棒の微小断面積 dS の帯を広げると、周長 $2\pi r$ と微小幅 dr からなる細い長方形となる。

$$dS = 2\pi r dr \quad \cdots(4.2.8)$$

dT の式に代入して 0 から半径 R まで積分すると、中実丸棒の断面二次極モーメント I_p と極断面係数 Z_p を得る。

$$dT = Gr^2 \theta (2\pi r dr) = 2\pi G\theta r^3 dr \quad \cdots(4.2.9)$$



$$T = 2\pi G\theta \int_0^R r^3 dr = 2\pi G\theta \left(\frac{R^4}{4} \right) = G\theta \left(\frac{\pi R^4}{2} \right) = G\theta \left(\frac{\pi(D/2)^4}{2} \right) = G\theta \left(\frac{\pi D^4}{32} \right) = G\theta I_P \quad \cdots(4.2.10)$$

$$Z_P = \frac{I_P}{R} = \frac{\pi D^4}{32} \bigg/ \frac{D}{2} = \frac{\pi D^3}{16} \quad \cdots(4.2.11)$$

(中実丸棒)
$$I_P = \frac{\pi D^4}{32} \quad \cdots(4.2.12)$$

(中実丸棒)
$$Z_P = \frac{\pi D^3}{16} \quad \cdots(4.2.13)$$

円管のような、断面中央がくりぬかれた丸棒を**中空丸棒**という。中空丸棒の断面二次極モーメントは、中空部の半径(円管内径) R_1 、丸棒の半径(円管外径) R_2 として、次式のように導かれる。

$$\begin{aligned} T &= 2\pi G\theta \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi G\theta \left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right) = G\theta \left(\frac{\pi R_2^4}{2} - \frac{\pi R_1^4}{2} \right) = G\theta \left[\frac{\pi(D_2/2)^4}{2} - \frac{\pi(D_1/2)^4}{2} \right] = G\theta \left(\frac{\pi D_2^4}{32} - \frac{\pi D_1^4}{32} \right) \\ &= G\theta \left[\frac{\pi(D_2^4 - D_1^4)}{32} \right] = G\theta I_P \quad \cdots(4.2.14) \end{aligned}$$

$$Z_P = \frac{I_P}{R} = \frac{\pi(D_2^4 - D_1^4)}{32} \bigg/ \frac{D_2}{2} = \frac{\pi(D_2^4 - D_1^4)}{16D_2} \quad \cdots(4.2.15)$$

(中空丸棒)
$$I_P = \frac{\pi(D_2^4 - D_1^4)}{32} \quad \cdots(4.2.16)$$

(中空丸棒)
$$Z_P = \frac{\pi(D_2^4 - D_1^4)}{16D_2} \quad \cdots(4.2.17)$$

参考文献

- [1] 伊藤勝悦; やさしく学べる材料力学(第3版), 森北出版(2014)
- [2] 臺丸谷政志, 小林秀敏; 基礎から学ぶ材料力学(第2版), 森北出版(2015)
- [3] 宇津木諭; 絵ときでわかる材料力学, オーム社(2007)
- [4] 有光 隆; 図解でわかるはじめての材料力学, 技術評論社(1999)
- [5] 有光 隆; これならわかる図解でやさしい入門材料力学(第2版), 技術評論社(2020)
- [6] 石田良平, 秋田 剛; ビジュアルアプローチ材料力学, 森北出版(2011)
- [7] 荒井政大; 図解はじめての材料力学, 講談社(2012)
- [8] 高等学校工業科用教科書, 土木基礎力学1 構造力学の基礎, 実教出版(2009)