

1. 粉体工学の概要

1. 1 粉粒体とは

細分化された固体粒子を**粉体**あるいは**粉粒体(powder)**という。身のまわりにはたくさんの粉体・粉粒体がある。砂、小麦粉、米、インスタントコーヒー、医薬品、花火などはいずれも固体であるが、粉体の場合はとりわけ表面の性状が重要となる。加えて粉体は、一般の固体とは異なり、流体のようにサラサラと流れやすく成形加工しやすいという性質をもつ。また、大きな比表面積を有するので、反応や溶解の速度が大きい。粉体は、固体粒子の集合体からなるので、その物理化学的性質は、個々の粒子性状によって変化する。すべての粒子が一樣に同じ寸法かつ球状であればプラント操作しやすいし、正確な物性値を用いて計算できる。しかし、実際には多かれ少なかれ寸法や形状にバラツキがある。固体が関わると途端にプラント操作が難しくなるのは、このためである。気体や液体は均一に混ぜることができるが、固体は現状のバラツキ度合いを均一にする所までしか混ざらない。計算に必要な粒子径なども平均の値を用いるので、そこからはみ出る寸法の粒子に対しては、計算値からは幾分外れることになる。ふるいである程度粒子寸法をそろえることはできるが、形状までそろえることはできない。同じ寸法でも、球状に近いものの方が流れやすく、供給・輸送しやすい。そのほか、粉体排出口での目詰まりや粉体が流れることで粒子性状が場所によって変化するなど(偏析)、粉体ならではの取り扱いの難しさがある。

粉体の定性的な定義について、次のようにまとめることができる。①細分化された固体粒子、②性質のちらばりをもつ固体粒子群、③表面特性が支配的となる固体粒子。

1. 2 粉体と粒体

粉粒体のうち、粒子の大きさが小さいものを**粉体**、大きいものを**粒体**という。区別することなく、たんに**粉体**と呼ぶことも多い。「粉」と「粒」の境界は、どこだろうか。我々の感覚からすれば、たとえば米粒は「粒」であり、小麦粉は「粉」である。何ミクロンからという厳密な境界寸法は存在しないが、粉体特有の**付着性**に着目した例として**平衡粒子径**がある。いま、一樣に球状の粉粒体を水平な台の上に山盛りに乗せる。そこにガラス板を押し当ててそっと引き上げると、ガラス板に付着する粒子もあれば、落下する粒子もある。前者が粉体、後者が粒体となる。両者がつり合うところでは、粒子の自重 W [N] と付着力 F [N] が等しくなっている。付着力は、**分子間力**、**液架橋力**、**静電気力**からなり、それぞれ分けて考える必要があるが、ここではひとまとめにして、付着力は粒子径の一乗に比例するものと仮定する。平衡粒子径 D_{eq} は、次式のように導かれる。

$$W = F \quad \cdots(1.2.1)$$

$$\left(\frac{\pi}{6}\right)\rho_p D_{eq}^3 g = k D_{eq} \quad \cdots(1.2.2)$$

$$\boxed{D_{eq} = \sqrt{\frac{6k}{\pi\rho_p g}}} \quad \cdots(1.2.3)$$

上式より、工学的には、粒子の種類や性質(ρ_p と k)によって粉と粒の境界粒径が変化することが分かる。

平衡粒子径 D_{eq} は、 $30\ \mu\text{m}$ 程度であることが知られている。なお、この値は、ファンデーションに含まれる微粉体や食品中の砂糖結晶粒など、人が感じることでできる下限の粒子径としても知られている。($30\ \mu\text{m}$ 以下に調製しないと、ザラザラとした触感が出てきて望ましくない。) そのほか、連続粉砕とふるい分けの下限である $3\ \mu\text{m}$ 以下を境に微粉体あるいは微粒子(**fine particle, fine powder**)と呼ぶこともある。

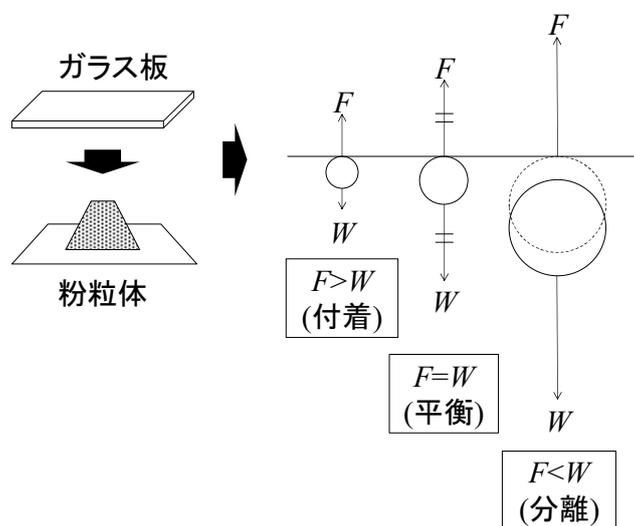


図 1.2.1 平衡粒子径の概念 [文献 1]

【計算例】平衡粒子径

粒子密度 $2.65\ \text{g/cm}^3$ の球粒子に対する平衡粒子径 D_{eq} [μm] を求めよ。ただし、粒子の付着力は粒子径の 1 乗に比例し(比例定数 $2.34 \times 10^{-5}\ \text{kg/s}^2$)、重力加速度 $9.81\ \text{m/s}^2$ とする。($30.0\ \mu\text{m}$)

$$D_{eq} = (k/\rho_p g)^{0.5} = [(2.34 \times 10^{-5}) / \{(2.65 \times 10^{-3})(9.81)\}]^{0.5} = 3.0002 \times 10^{-5}\ \text{m} \doteq \boxed{30.0\ \mu\text{m}}$$

1. 3 代表的な粉体産業

粉体プロセスが用いられている産業の例として、古くから**鉱業(mining)**や**窯業(ようぎょう, ceramics industry)**などがある。鉱業とは、鉱山で採掘された鉱石から有用な金属を取り出す産業分野である。その技術体系は、**冶金(やきん, metallurgy)**とか**金属製錬(extractive metallurgy)**と呼ばれる。化学工学的には、機械的単位操作の**固固分離(solid-solid separation)**に相当する。有用な金属が含まれる岩石を**鉱石(ore)**といい、それは、目的成分の**金属鉱物(mineral)**と不純物成分の**脈石(gangue)**の混合物でできている。採掘した鉱石を粉砕機にかけると、鉱石中の金属鉱物が濃縮されて次第に単成分化する。次に、密度差を利用した重量場や気泡付着による浮上や磁場を利用して、原料の**粗鉱(crude ore)**を高品位の**精鉱(concentrate)**と低品位の**尾鉱(びこう, tailing)**とに分離する。これを**選鉱(ore dressing)**という。その後は、乾燥と焙焼の各工程を経て固体抽出と晶析による**湿式精錬(hydrometallurgy)**、あるいは溶融による**乾式精錬(pyrometallurgy)**を行い、最終的に高純度の金属を回収する。 [文献 2-4]

窯業とは、陶磁器、セメント、ガラスなどの窯業製品(**セラミックス**ともいう)を製造する産業分野である。典型的な製法としては、砂や粘土などの天然鉱物(酸化物)を粉砕・ふるい分けして原料粉体を調製し、

これを適当な配合比で混合・混練して成形したものを焼成することで粉体を焼き固める。現在、化学的に合成した高純度酸化物や非酸化物(炭化物や窒化物など)も幅広く原料粉体として用いられるようになっている。こうした先端的な原料粉体を用いて製造された窯業製品を**ファインセラミックス(fine ceramics)**という【文献 5, 6】。陶芸も同じで、原土(鉱石)を砕いて粘土(鉱物)を取り出し、手やろくろで成形したものを窯(かま)で焼いて陶器を制作する。古代の土器づくりも、基本の工程は同じである。このように、粉体の良さには、流れやすさに加えて、成形加工のしやすさがある。(石ころの大きさだと、練って固めてができない。流れやすくもない。)

表 1.3.1 粉粒体の産業利用例【文献 7】

産業分野	関連粉体の例
鉱業・鉄鋼	鉄鉱石、石灰石、ボーキサイト、硫化鉱、酸化鉱
窯業(ようぎょう)	ケイ砂、アルミナ、マグネシア、ガラスビーズ
農業	種子、土壌、農薬、肥料
食品	米、でんぷん、小麦粉、砂糖、食塩
化粧品	タルク、マイカ、シリカ、酸化チタン
医薬品	原薬、顆粒剤、錠剤、散剤、丸剤
化学	無機薬品、有機薬品、高分子、触媒、色材
電子材料	酸化鉄、チタン酸バリウム、フェライト、金属粉
製紙・印刷	炭酸カルシウム、充填剤、パルプ、インキ
塗料	粉体塗料、顔料、トナー、マイクロカプセル
電力	フライアッシュ、ペレット
建設	骨材、砕石、砂、セメント
その他	花火(火薬)、花粉、黄砂、ウイルス

表 1.3.2 粉粒体単位操作の例【文献 8】

単位操作	方法
粉碎	固体を細分化して粒子を生成する。
晶析	反応や蒸発などにより粒子を生成する。
造粒	粒子同士を結合させて大粒径の粒子を生成する。
分級・ふるい分け	粒子径差や密度差により粒子を分離する。
集塵(しゅうじん)	さえぎりを用いて気相と粒子を分離する。
ろ過	さえぎりを用いて液相と粒子を分離する。
沈降分離	密度差により液相と粒子を分離する。
乾燥	物質移動により粉体の含水率を下げる。
固体混合・攪拌	異なる種類の乾燥粉体同士を均一にする。
混練・捏和(ねっか)	粒子に結合剤をコーティングして練り混ぜる。
成形	粒子同士を固めて形を作る。
焼結	成形したものを熱処理して焼き固める。
貯蔵	粉体を安定的に保管する。
供給	粉体を装置へ定量的に送り出す。
固体輸送	空気やコンベアを用いて粉体を運搬する。

1. 4 粉体工学の体系

粉体工学あるいは粉粒体工学(powder technology)の体系は、①粉体の物理化学的・静力学的性質を扱う「粉体物性論」、②流体中における粉体の動力学的性質を扱う「粉体運動論」、③粉碎、ふるい分け、混

合、焼結などの粉体処理を扱う「粉体単位操作論」で構成される【文献9】。粉体工学といえば、移動現象論や反応工学と並んで、化学工学に含まれる一分野という認識が強いかもしれない。しかし、三輪の「粉粒体工学」(1972年刊行)の解説【文献9】や、初期の成書であるJ.M. DallaValleの「Micromeritics(マイクロメリティクス)」(1948年刊行)の目次【文献10】からも読み取れるように、もともとは粉体物性論と粉体運動論が主軸の体系に据えられており、それ自身独立した学問であることがうかがえる。その後の発展過程で、粉体工学は、化学工学の「機械的単位操作」を取り入れるとともに、選鉱や焼結など古典的な粉体単位操作を加えて三つ目の軸である「粉体単位操作論」を確立した。したがって、従来からあった物性論と運動論が基礎編、単位操作論がそれらの応用編、という位置づけになる。

参考文献

- [1] 神保元二; 粉体の科学, 講談社ブルーバックス(1985), 1章
- [2] B.A. Wills & J.A. Finch; Mineral processing technology 8th Ed., Butterworth-Heinemann(2016), Chapter 1
- [3] 阿座上竹四, 栗倉泰弘; 金属精錬工学(金属化学入門シリーズ 3), 日本金属学会(1999), 2-4章
- [4] 文部科学省編; 高等学校用 材料製造技術, 実教出版(2005), 2章3節
- [5] 塩川二郎; 無機工業化学 第2版, 化学同人(1993), 10章
- [6] 文部科学省編; 高等学校用 セラミック工業, 実教出版(2003), 序章
- [7] 粉体工学会, 日本粉体工業技術協会編; 粉体物性図説, 日経技術図書(1985), p.6
- [8] 内藤牧男, 牧野尚美; 初歩から学ぶ粉体技術. 森北出版(2011), 1.3章
- [9] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), 1章
- [10] J.M. DallaValle; Micromeritics 2nd Ed., Pitman Pub. Co.(1948)

2. 粉粒体の基本物性

2. 1 粒子径

粒子の大きさを**粒度**(particle size)という。粒度の基準として、たとえば長さや体積などが考えられる。とくに前者を用いる場合は、**粒子径**または**粒径**(particle diameter)と呼ばれる。粒子径に関わらず、たんに「径」と言えば、それは直径を指す。粒子径は、粒子形状が球の場合に限り、一義的に決まる。立方体の場合は、対角線の長さが一辺の長さとは異なる。いびつな単一粒子の粒子径には、何らかの基準に基づいて定義された**代表粒子径**(characteristic particle diameter)を用いる。主な代表粒子径には、単一粒子の幾何学的形状に基づく**三軸径**(diameter of the three dimensions)、**相当径**(equivalent diameter)、**定方向径**(unidirectional particle diameter)に加えて、粒子群の取り扱いにはなるが、実用的なふるい目開き径 D_p 、**ストークス径**(Stokes diameter) D_{St} がある。

三軸径は、いびつな粒子を外接直方体に置き換える。置換した直方体の**長径** l 、**短径** b 、**厚み** t の各寸法が代表粒子径となる。相当径は、いびつな粒子をそれと同じ体積 V_p 、表面積 S_p 、終末沈降速度 u_t を持つ球に置換する。置換した球の寸法が代表粒子径であり、それぞれ**等体積球相当径**(equivalent volume diameter) D_V 、**等表面積球相当径**(equivalent surface diameter) D_S 、**ストークス径**(Stokes diameter) D_{St} という。そのほか、いびつな粒子と同じ投影面積を持つ円に置き換え、その直径を代表粒子径とする**ヘイウッド径**(Heywood diameter) D_H がある。

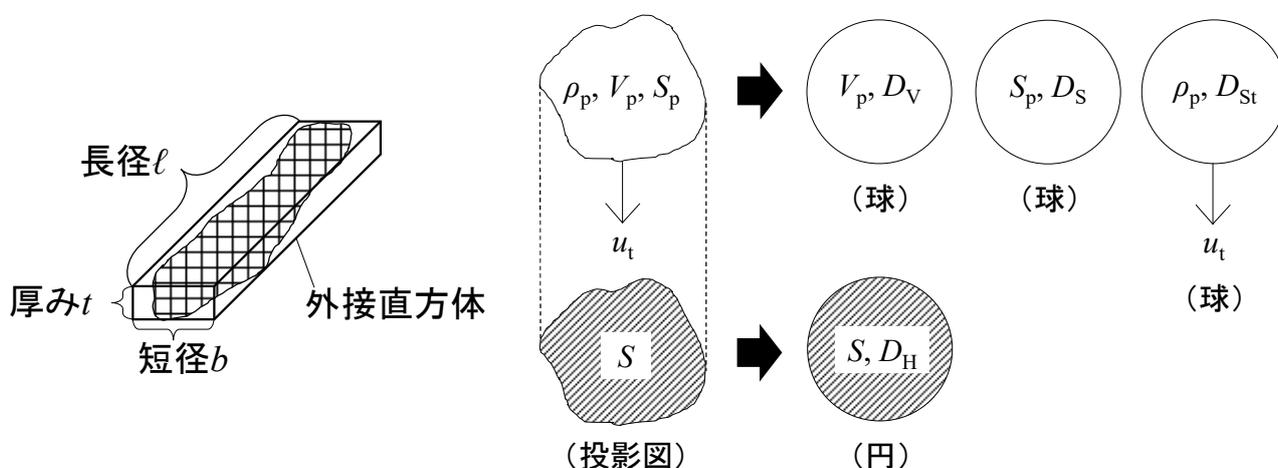


図 2.1.1 三軸径(左)と相当径(右)の定義

等体積球相当径は、次式のようにして導かれる。

$$V_p = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{D_V}{2} \right)^3 \quad \cdots(2.1.1)$$

$$D_V = \sqrt[3]{\frac{6V_p}{\pi}} \quad \cdots(2.1.2)$$

同様にして、等表面積球相当径は次式となる。

$$D_S = \sqrt{\frac{S_p}{\pi}} \quad \dots(2.1.3)$$

ストークス径は、自由沈降粒子の運動方程式を解いて、次式で与えられる。

$$D_{St} = \sqrt{\frac{18\mu u_t}{g(\rho_p - \rho)}} \quad \dots(2.1.4)$$

ただし、 g は重力加速度[m/s²]、 u_t は終末速度[m/s]、 ρ は液密度[kg/m³]、 ρ_p は粒子密度[kg/m³]、 μ は液粘度[Pa・s]。

定方向径は、粒子投影像を顕微鏡観察することで解析する。フェレー径(Feret diameter) D_F は、投影した粒子を定方向の二本の平行線で挟み、その垂線の長さで定義される。マーチン径(Martin diameter) D_M は、粒子の投影面積を二等分する線分の長さで定義される。クルムバイン径(Krummbein diameter) D_K は、投影した粒子像の最大長さで定義される。これらの代表径は、すべて同一方向の寸法で定義される。

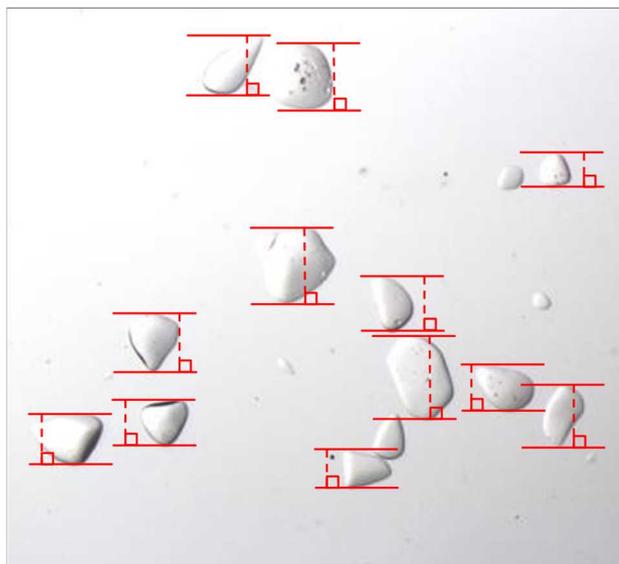


図 2.1.2 フェレー径の採寸例



図 2.1.3 マーチン径の採寸例

(図中の破線部がそれぞれの代表寸法を表す。フェレー径の平行線の向きやマーチン径の採寸の向きは任意だが、すべて同じ向きに統一する。マーチン径は、境界の両側で投影面積が同じになるように定める。クルムバイン径は、同じ向きに統一した上で、最大寸法の箇所を採寸する。)

表 2.1.1 主な代表粒子径 [文献 1]

分類	名称	記号	定義
三軸径	長径	ℓ	外接直方体の長軸寸法
	短径	b	外接直方体の短軸寸法
	厚み	t	外接直方体の厚み
相当径	等体積球相当径	D_V	いびつな粒子と等しい体積をもつ球の直径
	等表面積球相当径	D_S	いびつな粒子と等しい表面積をもつ球の直径
	ヘイウッド径	D_H	いびつな粒子と等しい投影面積をもつ円の直径
	ストークス径**	D_{St}	いびつな粒子と等しい沈降速度をもつ球の直径
定方向径	フェレー径	D_F	投影粒子を定方向の二本の平行線で挟んでできる垂線の長さ
	マーチン径	D_M	粒子の投影面積を二等分する定方向の線分の長さ
	クルムバイン径	D_K	投影した粒子像の定方向の最大長さ(定方向最大径ともいう。)

有効径*	ふるい目開き径	D_p	ふるいの目開きで定義される寸法
	(ストークス径)**	(D_{St})	いびつな粒子と等しい沈降速度をもつ球の直径

*粒子群に対する定義であるが、実用的(測定が便利)であるため、単一粒子径の分類表と一緒に記載している成書が多い。

**粒子群に対する定義であることから、相当径の代わりに有効径として分類している成書もある。【文献 2】

【計算例】代表粒子径

体積 $100 \mu\text{m}^3$ 、表面積 $100 \mu\text{m}^2$ のいびつな粒子の①等体積球相当径 D_v [μm]、②等表面積球相当径 D_s [μm]、③ヘイウッド径 D_H [μm]、④ストークス径 D_{St} [μm]を求めよ。ただし、粒子の投影面積 $25 \mu\text{m}^2$ 、水中における終末速度 $28.0 \mu\text{m/s}$ 、粒子密度 2650 kg/m^3 、水の密度 1000 kg/m^3 、水の粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(① $5.76 \mu\text{m}$, ② $5.64 \mu\text{m}$, ③ $5.64 \mu\text{m}$, ④ $5.58 \mu\text{m}$)

①実粒子と球粒子の体積を等置すると $V_p=(4/3)\pi(D_v/2)^3=\pi D_v^3/6$

$$D_v=(6V_p/\pi)^{1/3}=[(6/\pi)(100)]^{1/3}=5.7588 \mu\text{m} \doteq \boxed{5.76 \mu\text{m}}$$

②実粒子と球粒子の表面積を等置すると $S_p=4\pi(D_s/2)^2=\pi D_s^2$

$$D_s=(S_p/\pi)^{1/2}=(100/\pi)^{1/2}=5.6418 \mu\text{m} \doteq \boxed{5.64 \mu\text{m}}$$

③実粒子と球粒子の投影面積を等置すると $A_p=\pi(D_H/2)^2$

$$D_H=(4A_p/\pi)^{1/2}=[(4/\pi)(25)]^{1/2}=5.6418 \mu\text{m} \doteq \boxed{5.64 \mu\text{m}}$$

④ $D_{St}=[18\mu\eta/\{g(\rho_p-\rho)\}]^{1/2}=[(18)(1.00\times 10^{-3})(28.0\times 10^{-6})/\{(9.81)(2650-1000)\}]^{1/2}=5.5800\times 10^{-6} \text{ m} \doteq \boxed{5.58 \mu\text{m}}$

【問題】代表粒子径

- 一辺 $10 \mu\text{m}$ の立方体粒子の①等体積球相当径 D_v [μm]、②等表面積球相当径 D_s [μm]、③ヘイウッド径 D_H [μm]、④ストークス径 D_{St} [μm]を求めよ。ただし、粒子の投影像は正方形、水中における終末速度 $120 \mu\text{m/s}$ 、粒子密度 2650 kg/m^3 、水の密度 1000 kg/m^3 、水の粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(① $12.4 \mu\text{m}$, ② $13.8 \mu\text{m}$, ③ $11.3 \mu\text{m}$, ④ $11.6 \mu\text{m}$)
- 直径 $10 \mu\text{m}$ 、高さ $10 \mu\text{m}$ の円柱粒子の①等体積球相当径 D_v [μm]、②等表面積球相当径 D_s [μm]、③ヘイウッド径 D_H [μm]、④ストークス径 D_{St} [μm]を求めよ。ただし、粒子の投影像は正方形、水中における終末速度 $110 \mu\text{m/s}$ 、粒子密度 2650 kg/m^3 、水の密度 1000 kg/m^3 、水の粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(① $11.4 \mu\text{m}$, ② $12.2 \mu\text{m}$, ③ $11.3 \mu\text{m}$, ④ $11.1 \mu\text{m}$)
- 縦 $1 \mu\text{m}$ 、横 $1 \mu\text{m}$ 、高さ $10 \mu\text{m}$ の直方体粒子の①等体積球相当径 D_v [μm]、②等表面積球相当径 D_s [μm]、③ヘイウッド径 D_H [μm]、④ストークス径 D_{St} [μm]を求めよ。ただし、粒子の投影像は長方形、水中における終末速度 $4.80 \mu\text{m/s}$ 、粒子密度 2650 kg/m^3 、水の密度 1000 kg/m^3 、水の粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(① $2.67 \mu\text{m}$, ② $3.66 \mu\text{m}$, ③ $3.57 \mu\text{m}$, ④ $2.31 \mu\text{m}$)

2. 2 粒子形状

2.2.1 形状係数

形状係数(shape factor)は、粒子形状の数値化に用いる。いびつな単一粒子の表面積 S_p [m^2]は自身の粒子径の2乗に比例し、体積 V_p [m^3]と質量 W_p [kg]は粒子径の3乗に比例する。これらの比例関係は、次の一般式で表される。

$$S_p = \phi D_p^2 \quad \cdots(2.2.1.1)$$

$$V_p = \phi_v D_p^3 \quad \cdots(2.2.1.2)$$

$$W_p = \phi_v \rho_p D_p^3 \quad \cdots(2.2.1.3)$$

ただし、 ϕ_s は表面積形状係数[-]、 ϕ_v は体積形状係数[-]。

粒子群の場合は、上の3式の右辺に粒子数 N [-]を乗じて、左辺を総表面積、総体積、総重量とみなすことで対応できる。あるいは、粒子数 N の概算に用いることもできる。

体積基準と質量基準の比表面積 S_V [m^2/m^3]と S_W [m^2/kg]は、それぞれ上式を用いて以下のように表される。

$$S_V = \frac{S_p}{V_p} = \frac{\phi_s D_p^2}{\phi_v D_p^3} = \frac{\phi}{D_{PS}} \quad \left[\phi \equiv \frac{\phi_s}{\phi_v} \right] \quad \cdots(2.2.1.4)$$

$$S_W = \frac{S_p}{W_p} = \frac{\phi_s D_p^2}{\phi_v \rho_p D_p^3} = \frac{\phi}{\rho_p D_{PS}} \quad \cdots(2.2.1.5)$$

ただし、 D_{PS} は比表面積径[m]、 ϕ_l は比表面積形状係数[-]。

球粒子の表面積形状係数 ϕ_s は、一般式 S_p と球の表面積を等置して求められる。

$$\phi_s D_p^2 = 4\pi \left(\frac{D_p}{2} \right)^2 \quad \cdots(2.2.1.6)$$

$$\boxed{\phi_s = \pi} \quad \cdots(2.2.1.7)$$

球粒子の体積形状係数 ϕ_v は、一般式 V_p と球の体積を等置して求められる。

$$\phi_v D_p^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{D_p}{2} \right)^3 \quad \cdots(2.2.1.8)$$

$$\boxed{\phi_v = \frac{\pi}{6}} \quad \cdots(2.2.1.9)$$

球粒子の比表面積形状係数 ϕ_l は、形状係数の比より求められる。

$$\phi = \frac{\phi_s}{\phi_v} \quad \cdots(2.2.1.10)$$

$$\boxed{\phi = 6} \quad \cdots(2.2.1.11)$$

同様にして、立方体粒子の各形状係数は、それぞれ $\phi_s=6$ 、 $\phi_v=1$ 、 $\phi=6$ と求められる。また、高さ h と直径 d の等しい円柱粒子の各形状係数は、それぞれ $\phi_s=3\pi/2$ 、 $\phi_v=\pi/4$ 、 $\phi=6$ と求められる。

上記のほか、カルマンの形状係数 ϕ_c もよく用いられる。

$$\phi_c = \frac{6}{S_V D_V} \quad \left[D_V \equiv \sqrt[3]{\frac{6V_p}{\pi}} \right] \quad \cdots(2.2.1.12)$$

カルマンの形状係数は、球からのずれの程度を表しており、球のとき $\phi_c=1$ となる。後で述べるように、球形度(sphericity)に等しい。

【計算例】形状係数

立方体粒子の①体積形状係数 ϕ_v 、②表面積形状係数 ϕ_s 、③比表面積形状係数 ϕ を求めよ。(①1, ②6, ③6)

$$\textcircled{1} V_p = D_p^3 \quad \phi_v = V_p / D_p^3 = D_p^3 / D_p^3 = \boxed{1}$$

$$\textcircled{2} S_p = 6D_p^2 \quad \phi_s = S_p / D_p^2 = 6D_p^2 / D_p^2 = \boxed{6}$$

$$\textcircled{3} \phi = \phi_s / \phi_v = 6/1 = \boxed{6}$$

【問題】形状係数

- (1) 球粒子の①体積形状係数 ϕ_v 、②表面積形状係数 ϕ_s 、③比表面積形状係数 ϕ を求めよ。(① $\pi/6$, ② π , ③6)
- (2) 高さと同じ直径の等しい円柱粒子の①体積形状係数 ϕ_v 、②表面積形状係数 ϕ_s 、③比表面積形状係数 ϕ を求めよ。(① $\pi/4$, ② $3\pi/2$, ③6)
- (3) 正八面体粒子の①体積形状係数 ϕ_v 、②表面積形状係数 ϕ_s 、③比表面積形状係数 ϕ を求めよ。(①0.471, ②3.46, ③7.35)
- (4) 縦と横と高さの寸法比が1:2:5の直方体粒子の①体積形状係数 ϕ_v 、②表面積形状係数 ϕ_s 、③比表面積形状係数 ϕ を求めよ。(①10, ②34, ③3.4)
- (5) 体積 $125 \mu\text{m}^3$ 、表面積 $150 \mu\text{m}^2$ 、粒子径 $5.00 \mu\text{m}$ のいびつな粒子の①体積形状係数 ϕ_v 、②表面積形状係数 ϕ_s 、③比表面積形状係数 ϕ を求めよ。(①1, ②6, ③6)

2.2.2 平均形状係数

複数の粒子形状が混在した粒子群に対する平均体積形状係数 $\phi_{v,av}$ は、実粒子群と一般粒子群の全体積を等置して導かれる。

$$\sum n_i V_{pi} = \sum n_i \phi_{v,av} D_{pi}^3 \quad \cdots(2.2.2.1)$$

$$\phi_{v,av} = \sum n_i V_{pi} / \sum n_i D_{pi}^3 = (n_1 V_{p1} + n_2 V_{p2} + \cdots) / (n_1 D_{p1}^3 + n_2 D_{p2}^3 + \cdots) \quad \cdots(2.2.2.2)$$

平均表面積形状係数 $\phi_{s,av}$ についても同様に実粒子群と一般粒子群の全表面積を等置して導かれる。

$$\sum n_i S_{pi} = \sum n_i \phi_{s,av} D_{pi}^2 \quad \cdots(2.2.2.3)$$

$$\phi_{s,av} = \sum n_i S_{pi} / \sum n_i D_{pi}^2 = (n_1 S_{p1} + n_2 S_{p2} + \cdots) / (n_1 D_{p1}^2 + n_2 D_{p2}^2 + \cdots) \quad \cdots(2.2.2.4)$$

形状係数と粒子径の代表値が分かっている場合は、粒子群の全重量 W_p または全表面積 S_p より粒子数 N を求めることができる。

$$N = W_p / (\phi_v \rho_p D_p^3) \quad \cdots(2.2.2.5)$$

$$N = S_p / (\phi_s \rho_p D_p^2) \quad \cdots(2.2.2.6)$$

【計算例】平均形状係数

代表径 $1200 \mu\text{m}$ の球粒子が3個、 $800 \mu\text{m}$ の立方体粒子が2個、 $400 \mu\text{m}$ の高さと同じ直径の等しい円柱粒子が5個ある。これらを混合した場合の①平均体積形状係数 $\phi_{v,av}$ 、②平均表面積形状係数 $\phi_{s,av}$ 、③平均比表面積形状係数 ϕ を求めよ。(①0.611, ②3.91, ③6.40)

$$\text{(球粒子)} n_1 = 3, S_{p1} = \pi D_{p1}^2 = \pi (1.200)^2 = 1.44\pi \text{ mm}^2, V_{p1} = (\pi/6) D_{p1}^3 = (\pi/6) (1.200)^3 = 0.288\pi \text{ mm}^3$$

$$\text{(立方体粒子)} n_2 = 2, S_{p2} = 6D_{p2}^2 = (6)(0.800)^2 = 3.84 \text{ mm}^2, V_{p2} = D_{p2}^3 = (0.800)^3 = 0.512 \text{ mm}^3$$

$$(円柱粒子) n_3=5, S_{p3}=2\pi(D_{p3}/2)^2+2\pi(D_{p3}/2)h=2\pi(D_{p3}/2)^2+2\pi(D_{p3}/2)D_{p3}=(3\pi/2)D_{p3}^2=(3\pi/2)(0.400)^2=0.240\pi \text{ mm}^2$$

$$V_{p3}=\pi(D_{p3}/2)^2h=\pi(D_{p3}/2)^2D_{p3}=(\pi/4)D_{p3}^3=(\pi/4)(0.400)^3=0.016\pi \text{ mm}^3$$

$$\textcircled{1} \phi_{v,av}=\frac{\sum n_i V_{pi}}{\sum n_i D_{pi}^3}=(n_1 V_{p1}+n_2 V_{p2}+n_3 V_{p3})/(n_1 D_{p1}^3+n_2 D_{p2}^3+n_3 D_{p3}^3)$$

$$=[(3)(0.288\pi)+(2)(0.512)+(5)(0.016\pi)]/[(3)(1.200)^3+(2)(0.800)^3+(5)(0.400)^3]=0.61116 \doteq \boxed{0.611}$$

$$\textcircled{2} \phi_{s,av}=\frac{\sum n_i S_{pi}}{\sum n_i D_{pi}^2}=(n_1 S_{p1}+n_2 S_{p2}+n_3 S_{p3})/(n_1 D_{p1}^2+n_2 D_{p2}^2+n_3 D_{p3}^2)$$

$$=[(3)(1.44\pi)+(2)(3.84)+(5)(0.240\pi)]/[(3)(1.200)^2+(2)(0.800)^2+(5)(0.400)^2]=3.9096 \doteq \boxed{3.91}$$

$$\textcircled{3} \phi=\phi_s/\phi_v=3.9096/0.61116=6.3970 \doteq \boxed{6.40}$$

【問題】 平均形状係数

代表径 10.0 mm の球粒子が 1 個、1.00 mm の立方体粒子が 3 個、0.100 mm の高さと同じ直径の等しい円柱粒子が 6 個ある。これらを混合した場合の①平均体積形状係数 $\phi_{v,av}$ 、②平均表面積形状係数 $\phi_{s,av}$ 、③平均比表面積形状係数 ϕ を求めよ。(①0.525, ②3.22, ③6.14)

【計算例】 粒子数

粒子密度 2650 kg/m³、粒子径 100 μm の球状粒子 10.0 kg 分の粒子数 $N[-]$ を求めよ。(7.21×10⁹)

$$V_p=(4/3)\pi(D_p/2)^3=(\pi/6)D_p^3$$

$$\phi_v=V_p/D_p^3=(\pi/6)D_p^3/D_p^3=\pi/6$$

$$N=W_p/(\phi_v \rho_p D_p^3)=10.0/[(\pi/6)(2650)(100 \times 10^{-6})^3]=7.207 \times 10^9 \doteq \boxed{7.21 \times 10^9}$$

【問題】 粒子数

- (1) 粒子密度 2650 kg/m³、粒子径 100 μm の立方体粒子 10.0 kg 分の粒子数 $N[-]$ を求めよ。(3.77×10⁹)
- (2) 粒子密度 2650 kg/m³、粒子径 100 μm の高さと同じ直径の等しい円柱粒子 10.0 kg 分の粒子数 $N[-]$ を求めよ。(4.80×10⁹)

2.2.3 形状指数

形状指数(shape index)は、同一粒子の形状比較に用いる。長短度は、アスペクト比(aspect ratio)とも呼ばれ、三軸径における長径と短径の比(ℓ/b)で表される(縦と横の長さの比)。この値が大きい程、粒子形状は針状に近づく。一方、扁平度は、三軸径における厚みと短径の比(b/t)で表される。この値が大きい程、粒子形状は板状に近づく。

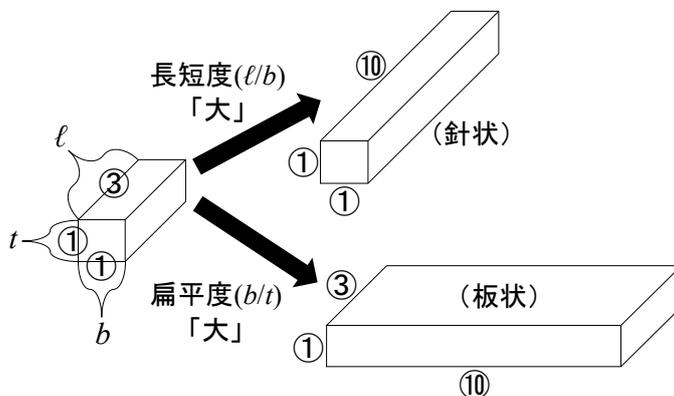


図 2.2.3.1 形状指数の影響

球形度 ψ (プサイ, sphericity)[-]は、実粒子と同じ体積をもつ球(等体積球)の表面積 S_{pV} と実粒子の表面積 S_p の比(S_{pV}/S_p)で定義される。この値が1に近い程、粒子形状は球に近い。たとえば、立方体の球形度は、次のようにして求めることができる。

①**等体積球の表面積**：実粒子である立方体の一辺の長さを1とすると、実粒子の体積は1である。これと同じ体積をもつ球の半径 r は、 $1=(4\pi/3)r^3 \rightarrow r=(3/4\pi)^{1/3}$ となることから、等体積球の表面積は、 $S_{pV}=4\pi r^2=4\pi(3/4\pi)^{2/3}$ となる。

②**実粒子の表面積**：面積1の面が全部で6つあるので、 $S_p=6$ となる。

③**球形度**： $\psi=S_{pV}/S_p=4\pi(3/4\pi)^{2/3}/6=0.806$ 。立方体は、8割がた球に近い形状と言える。

球形度を変形すると、次式のようになる。

$$\psi \equiv \frac{S_{pV}}{S_p} \quad \cdots(2.2.3.1)$$

$$\psi = \frac{4\pi(D_V/2)^2}{S_p} \quad \cdots(2.2.3.2)$$

$$\psi = \frac{\pi D_V^2}{S_p} \quad \cdots(2.2.3.3)$$

$$\psi = \frac{\pi(6V_p/\pi)^{2/3}}{S_p} \left[D_V \equiv \sqrt[3]{\frac{6V_p}{\pi}} \right] \quad \cdots(2.2.3.4)$$

$$\psi = \frac{\pi(6V_p/\pi)^{2/3}}{S_p} \frac{(6V_p/\pi)^{1/3}}{(6V_p/\pi)^{1/3}} \quad \cdots(2.2.3.5)$$

$$\psi = \frac{6V_p}{S_p} \frac{1}{(D_V^3)^{1/3}} \quad \cdots(2.2.3.6)$$

$$\psi = \frac{6}{(S_p/V_p)D_V} \quad \cdots(2.2.3.7)$$

$$\psi = \frac{6}{S_V D_V} \quad \cdots(2.2.3.8)$$

$$\psi = \frac{6}{[6/(\phi_c D_V)]D_V} \quad \cdots(2.2.3.9)$$

$$\boxed{\psi = \phi_c} \quad \cdots(2.2.3.10)$$

球形度は、カルマンの形状係数に等しい。以上の導出は、三輪の方法にしたがった。[文献 3]

【計算例】球形度

高さと同径の等しい円柱粒子の球形度 ψ を求めよ。(0.874)

$$V_p = \pi(D_p/2)^2 h = \pi(D_p/2)^2 D_p = (\pi/4)D_p^3$$

$$D_V = (6V_p/\pi)^{1/3} = [(6/\pi)(\pi/4)D_p^3]^{1/3} = (3/2)^{1/3}D_p$$

$$S_{pv}=4\pi(D_v/2)^2=4\pi[(3/2)^{1/3}D_p/2]^2=(3/2)^{2/3}\pi D_p^2$$

$$S_p=2\pi(D_p/2)^2+2\pi(D_p/2)h=2\pi(D_p/2)^2+2\pi(D_p/2)D_p=(3\pi/2)D_p^2$$

$$\psi=S_{pv}/S_p=(3/2)^{2/3}\pi D_p^2/(3\pi/2)D_p^2=0.8735 \doteq \boxed{0.874}$$

【問題】球形度

- (1) 高さと同じ直径の等しい円柱粒子の球形度 ψ を求めよ。(0.874)
 (2) 正八面体粒子の球形度 ψ を求めよ。(0.846)

2. 3 粒子密度

2.3.1 粒子密度の定義

単一粒子の密度は、粒子内部の空孔や割れ目を粒子自身の体積に含めない**真密度(true density)** ρ_t [kg/m³]と、空孔や割れ目を粒子自身の体積に含める**粒子密度(particle density)** ρ_p [kg/m³]に大別される。また、容器に充填された粒子群に対する定義として、粒子内部の空孔や割れ目のほか容器-粒子間の空隙や粒子-粒子間の空隙を粒子群の体積に含める**かさ密度 (bulk density)** ρ_b [kg/m³]がある。(見かけ密度、かさ比重ともいう。)

$$\rho_t = \frac{W_p}{V_t} \quad \cdots(2.3.1.1)$$

$$\rho_p = \frac{W_p}{V_t + V_i} = \frac{W_p}{V_p} \quad \cdots(2.3.1.2)$$

$$\rho_b = \frac{W_p}{V_t + V_i + V_e} = \frac{W_p}{V_p + V_e} = \frac{W_p}{V_b} \quad \cdots(2.3.1.3)$$

ただし、 V は粒子体積[m³]、 W_p は粒子質量[kg]。添え字 e は粒子間空隙の体積、 i は粒子内部の空孔体積、 p は真の体積に空孔体積を含めた値、 t は粒子の真の体積。 V_p (または V_t)と W_p は、粒子1個と複数個の両方の場合に適用される。(複数個の場合は、 V_p (または V_t)と W_p を粒子数で割れば、1個あたりになる。) 粒子密度とかさ密度の間には、次の関係式が成り立つ。

$$\rho_b = \rho_p \frac{V_p}{V_b} \quad \cdots(2.3.1.4)$$

$$\boxed{\rho_b = \rho_p(1-\varepsilon)} \quad \cdots(2.3.1.5)$$

ただし、 ε は空隙率[-]であり、充填層体積に対する空隙体積の比で定義される。

【計算例】かさ密度

断面積 20 cm² の容器に試料粉体 300 g を投入したところ、高さは 10 cm であった。①この試料粉体のかさ密度 ρ_b [g/cm³]を求めよ。②この粉体を 45 t 貯蔵するのに必要となる貯槽の容積[m³]を求めよ。③この粉体を貯蔵するのに必要となる貯槽の容積は、かさ密度 1.80 g/cm³ の粉体を同じ重量だけ貯蔵する場合の何倍になるか求めよ。(①1.5 g/cm³, ②30 m³, ③1.2 倍)

$$\textcircled{1} V_b = AL = (20)(10) = 200 \text{ cm}^3, \rho_b = W_p/V_b = 300/200 = \boxed{1.5 \text{ g/cm}^3}$$

$$\textcircled{2} V_b = W_p / \rho_b = 45000 / 1500 = \boxed{30 \text{ m}^3}$$

$$\textcircled{3} (1/\rho_{b1}) / (1/\rho_{b2}) = (1/1.50) / (1/1.80) = \boxed{1.2 \text{ 倍}}$$

【問題】かさ密度

- (1) 100 g の容器に試料粉体をかさ体積 20 cm³ まで投入したときの合計の重量は 130 g であった。①この試料粉体のかさ密度 ρ_b [g/cm³] を求めよ。②この粉体を 30 t 貯蔵するのに必要となる貯槽の容積[m³] を求めよ。③この粉体を貯蔵するのに必要となる貯槽の容積は、かさ密度 2.10 g/cm³ の粉体を同じ重量だけ貯蔵する場合の何倍になるか求めよ。(①1.5 g/cm³, ②20 m³, ③1.4 倍)
- (2) 円筒容器に粒子密度 2.60 g/cm³ の試料粉体を投入したところ、空隙率は 0.300 であった。①この試料粉体のかさ密度 ρ_b [g/cm³] を求めよ。②この粉体を 91 t 貯蔵するのに必要となる貯槽の容積[m³] を求めよ。③この粉体を貯蔵するのに必要となる貯槽の容積は、かさ密度 3.64 g/cm³ の粉体を同じ重量だけ貯蔵する場合の何倍になるか求めよ。(①1.82 g/cm³, ②50 m³, ③2 倍)

2.3.2 粒子密度の測定法

粒子密度の測定法については、液浸法や気体置換法などがある。以下、ピクノメーターを用いた液浸法について述べる。乾燥させた空のピクノメーター(W_1 [kg]、 V_1 [m³])に蒸留水または灯油 ρ [kg/m³] を満たし、ピクノメーターの重量を測定する(W_2 [kg])。このとき、次式が成り立つ。

$$W_2 = W_1 + \rho V_1 \quad \dots(2.3.2.1)$$

次に、ピクノメーターに試料粉体(W_p [kg]、 V_p [m³])を投入し、ピクノメーターの重量を測定する(W_3 [kg])。このとき、次式が成り立つ。

$$W_3 = W_1 + W_p + \rho(V_1 - V_p) \quad \dots(2.3.2.2)$$

上式の($V_1 - V_p$)は、試料粉体を入れた段階で液があふれるので、その後に残る液の体積を表す。

W_2 と W_3 の式より W_1 を消去すると、粒子体積 V_p は次式で表される。

$$V_p = \frac{W_2 + W_p - W_3}{\rho} \quad \dots(2.3.2.3)$$

上式を粒子密度 ρ_p の定義式に代入すると、実験値に基づく粒子密度を得る。

$$\boxed{\rho_p = \frac{\rho W_p}{W_2 + W_p - W_3}} \quad \dots(2.3.2.4)$$

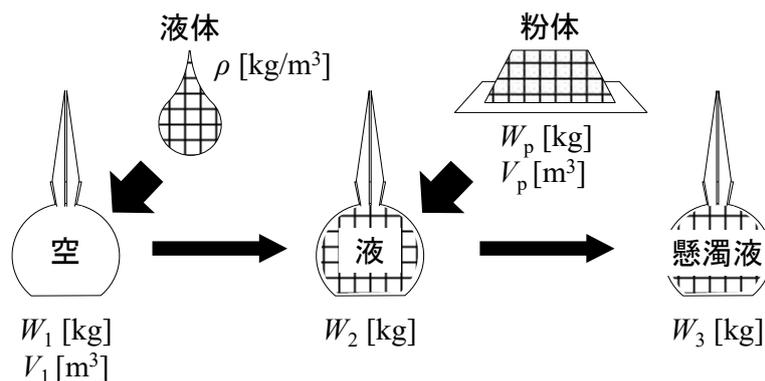


図 2.3.1 液浸法による粒子密度の測定

【計算例】粒子密度の測定法

乾燥させた空のピクノメーターに鉱油を満たし、ピクノメーターの重量を秤量すると 78 g であった。このピクノメーターに試料粉体 10 g を投入し、ピクノメーターの重量を秤量すると 86 g であった。粉体試料の粒子密度 ρ_p [g/cm³] を求めよ。鉱油の密度 0.80 g/cm³ とする。(4.0 g/cm³)

$$\rho_p = W_p \rho / (W_2 + W_p - W_3) = (10)(0.80) / (78 + 10 - 86) = 4.0 \text{ g/cm}^3$$

【問題】粒子密度の測定法

乾燥させた空のピクノメーターに水を満たし、ピクノメーターの重量を秤量すると 80 g であった。このピクノメーターに試料粉体 10 g を投入し、ピクノメーターの重量を秤量すると 86 g であった。粉体試料の粒子密度 ρ_p [g/cm³] を求めよ。水の密度 1.0 g/cm³ とする。(2.5 g/cm³)

2. 4 粒子径分布

2.4.1 分布の表し方

分布とは「バラツキ」のことである。身長、体重、年齢別人口など。粒子群における粒子径のバラツキを**粒子径分布(particle size distribution)**という。粒子径分布を解析することで、粒子のバラツキの度合いや粒子径の平均値を図上で明らかにすることができる。粒子径分布の基本は、**偏差(deviation)**と**平均(mean)**であり、これらの統計量をもとに分布曲線の形状が表現される。分布曲線を描く以前に、粒子径の測定と粒子径分布の解析を行う必要がある。具体的には、粗大粒子であればふるい、微小粒子であれば顕微鏡観察や沈降実験により、代表粒子径を複数測定する。得られた粒子径データをもとに粒子径範囲を適当に区切り、それぞれの範囲に含まれる粒子量の割合を個数基準または重量基準で求める。ふるいや沈降実験であれば粒子重量が測定データとなるので重量基準になるし、顕微鏡観察であれば画像データをもとに粒子数を計数するので個数基準になる。いずれも互換性があり、基準を変更することができる。

ふるいによる粒子径分布の解析例を以下の図表に示す。代表粒子径ごとの粒子量割合の扱い方によって粒子径分布の種類が異なる。**積算ふるい上分布(cumulative oversize distribution)R [%]**は、ある基準粒子径以上の累積の粒子量割合を表す。たとえば、下表の 850 μm を基準粒子径に取った場合は、850~3360 μm

のふるい目開きの質量基準粒子量割合を合算すればよいので、 $R=0.00+1.20+2.90+18.8+28.8=51.7\%$ となる。積算ふるい下分布(cumulative undersize distribution) $U[\%]$ は、ある基準粒子径以下の累積の粒子量割合を表し、100%からふるい上分布を差し引くことで求められる。頻度分布(frequency distribution) $f[\%/\mu\text{m}]$ は、ある粒子径幅あたりの粒子量割合を表す。この粒子量割合は、ふるい目開きごとの積算ふるい下またはふるい上分布の差で表される。たとえば、下表の1700~2360 μm に含まれる粒子量割合は、1700 μm のふるいに乗っている粒子群に対する割合に相当し、2.90%となる。それを粒子径幅あたりに直せばよいので、 $f=2.90/(2360-1700)=0.00439\%/\mu\text{m}$ となる。あるいは、定義式に当てはめると、 $f=dU/dD_p=-dR/dD_p=-(4.10-1.20)/(1700-2360)=0.00439\%/\mu\text{m}$ となり、上と同じ計算結果を得る。積算分布の「ある基準粒子径」は、各粒子径範囲を代表する粒子径と考えればよい。ふるいを用いた場合は、ふるい目開きが基準粒子径となる。また、顕微鏡で観察した投影像を用いた場合は、粒子径範囲を任意に区切る。たとえば100 μm から10 μm ごとに区切っていったとして、90~100 μm の粒子径範囲に含まれる粒子を一律95 μm とみなせば、その値が基準粒子径となる。その隣の80~90 μm の範囲であれば、85 μm が第二の基準粒子径となる。なお、粒子径範囲の下限値(80, 90 μm)を基準粒子径に用いる場合もある。また、粒子径範囲の区切り幅は、等間隔でなくてもよい。頻度分布の単位 $[\%/\mu\text{m}]$ の分母は、粒子径範囲の区切り幅に相当し、自分で決めた幅にしてよい。10 μm ごとであれば、 $[\%/(10 \mu\text{m})]$ となる。ただし、頻度分布の場合、頻度の単位が異なるものどうしでの比較はできないので、1 μm あたりに統一しておくといよい。

積算分布を用いた場合の平均粒子径は、メジアン径(中位径, median diameter)で表される。一方の積算分布を作成しておき、50%における粒子径を読むか、あるいは両方の積算分布を作成したならば、両者の交点を読んでもよい。下図の場合、約860 μm となる。一方、頻度分布の場合は、モード径(最頻径, modal diameter)で表される。最も頻度の大きい所の粒子径を読むが、ヒストグラム表示の場合は幅があるので、一義的に決まらない場合がある。とくに指定が無ければ、幅の中央値を読む。下図の場合、約720 μm となる。粒子径分布の形状よりバラツキの程度を定性的に判断することができる。積算分布の場合は、傾斜が急峻であるほど粒子径がよく揃っている。一方、頻度分布の場合は、分布の幅が狭く、ピークの高さが高いほど粒子径がよく揃っている。(かりにすべての粒子径が1000 μm であったとして、積算分布・頻度分布ともにどのような形状になるか想像してみよ。)

表 2.4.1.1 粒子径分布の解析例 [文献 4]

ふるい目開き $D_p [\mu\text{m}]$	粒子質量割合 $w \times 100 [\text{wt}\%]$	積算ふるい上 $R [\%]$	積算ふるい下 $U [\%]$	頻度 $f [\%/\mu\text{m}]$
3350	0.00	0.00	100	
				0.00121
2360	1.20	1.20	98.8	
				0.00439
1700	2.90	4.10	95.9	
				0.03615
1180	18.8	22.9	77.1	
				0.08727
850	28.8	51.7	48.3	
				0.08800
600	22.0	73.7	26.3	
				0.06343
425	11.1	84.8	15.2	
				0.04800
300	6.00	90.8	9.20	

				0.04432
212	3.90	94.7	5.30	
				0.03065
150	1.80	96.6	3.40	
				0.02727
106	1.30	97.8	2.20	
				0.02075
0(受皿)	2.20	100	0.00	

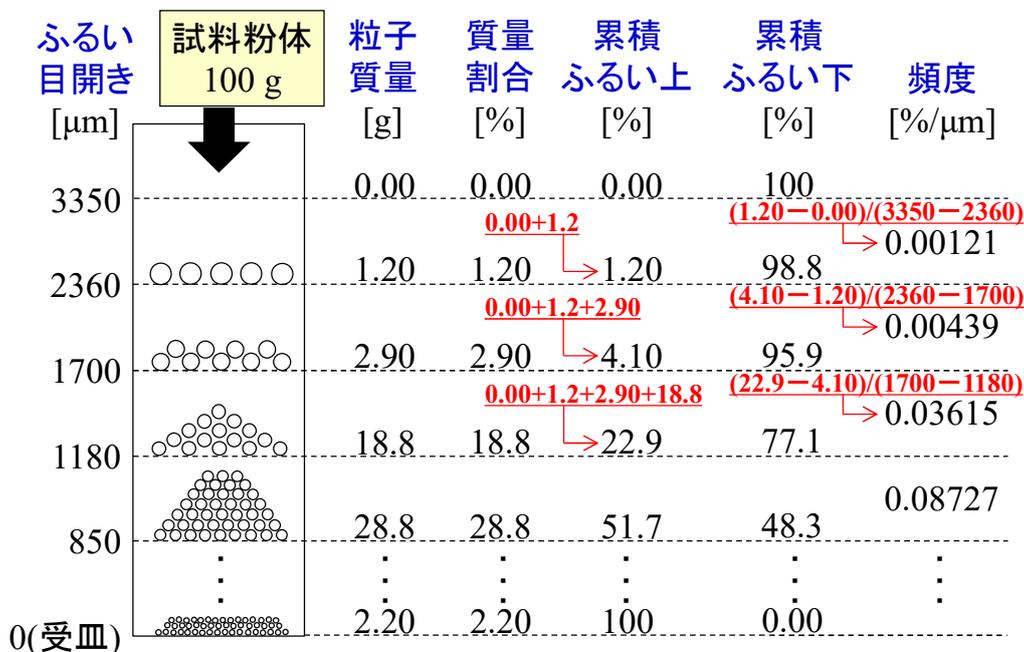


図 2.4.1.1 粒径分布解析の説明図(ふるい法)

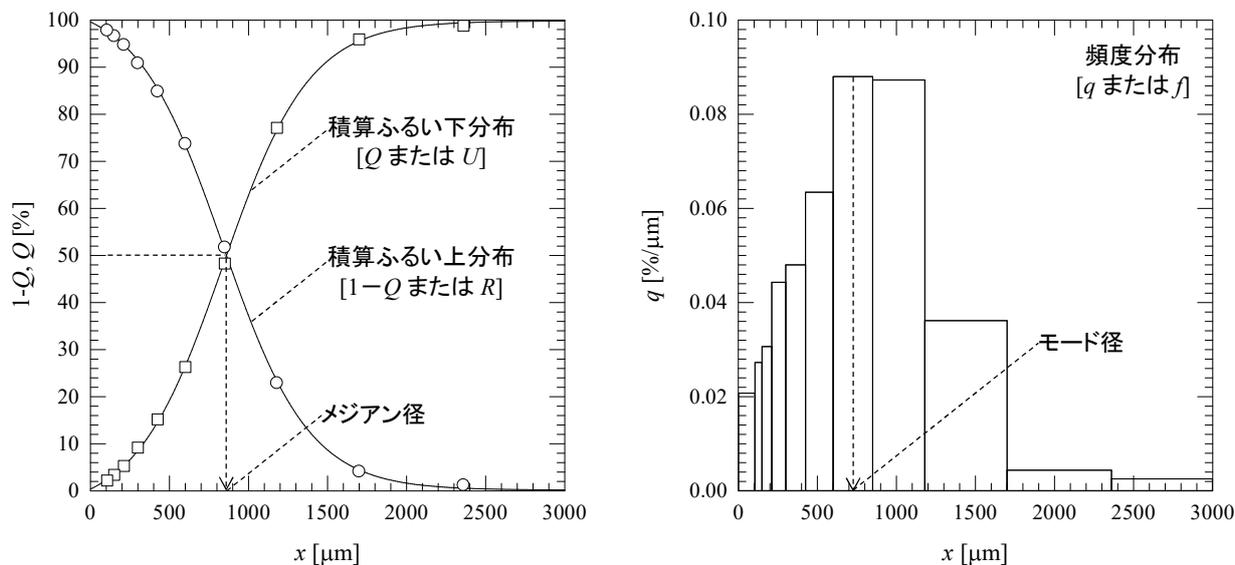


図 2.4.1.2 積算分布(左)と頻度分布(右)

【問題】 粒子径分布

下表の粒子径データに対する①積算ふるい上分布 R 、②積算ふるい下分布 U 、③頻度分布 f を作成せよ。メジアン径とモード径の読み取りの痕跡を図示すること。

D_p [μm]	50	40	30	25	20	15	10	7	5	3	1
R [%]	2.00	6.00	17.0	26.0	41.0	55.0	78.0	86.0	91.0	96.7	99.0

2.4.2 正規分布

粒子径のバラツキを定量的に評価するには、粒子径データを適当な理論分布曲線に当てはめる必要がある。**正規分布(normal distribution)**は、数学的にもっとも基本的な分布曲線である。分布形状は釣り鐘状であり、左右対称になっている。分布の幅を表す**標準偏差 σ (standard deviation)**と、分布の中心軸かつ位置を表す**平均 μ (mean)**の2変数で表される。

$$f = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(D_p - D_{50})^2}{2\sigma^2}\right] \quad \cdots(2.4.2.1)$$

指数項は基本骨格の部分であり、図上で釣り鐘の形状を示す。そこに分布の幅(バラツキ)を表す σ と分布の中心軸(平均)を表す μ を与えることで分布形状が決まる。上表の粒子径データを上式に当てはめた結果を下図に示す。現在は表計算ソフトを用いることで分布曲線を描かずとも σ と μ を容易に推定できる時代だが、昔は**正規確率紙**を用いて正規分布曲線を直線で表し、図上で σ と μ を読み取っていた。正規確率紙(片対数紙に似ているが、異なる)の縦軸は**確率目盛**と呼ばれ、上式を積算した値、すなわち正規分布の積分値(累積の面積)を表す。標準偏差 σ は、積算ふるい下 84.13%径 $D_{84.13}$ と 50%径 D_{50} ($=\mu$)の差、あるいは 50%径 D_{50} と 15.87%径 $D_{15.87}$ の差で与えられる。

$$\sigma = D_{84.13} - D_{50} \quad \cdots(2.4.2.2)$$

$$\sigma = D_{50} - D_{15.87} \quad \cdots(2.4.2.3)$$

粒子径データが理想的な正規分布にしたがう場合は、上の2式は同じ値となる。しかし、実際には理論曲線からのずれを伴うことから、両式の算術平均を標準偏差 σ として採用する。

$$\sigma = \frac{(D_{84.13} - D_{50}) + (D_{50} - D_{15.87})}{2} \quad \cdots(2.4.2.4)$$

$$\sigma = \frac{D_{84.13} - D_{15.87}}{2} \quad \cdots(2.4.2.5)$$

バラツキの定量的評価には、**変動係数 CV (coefficient of variation)**を用いる。変動係数 CV は、分布解析より求められる**標準偏差 σ (standard deviation)**と**平均 μ (mean)**の比で定義される。値が小さい程、バラツキは小さく、分布幅が狭い。

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 \quad [\%] \quad \cdots(2.4.2.6)$$

$$CV = \frac{D_{84.13} - D_{15.87}}{2D_{50}} \times 100 \quad [\%] \quad \cdots(2.4.2.7)$$

正規確率紙上で $D_{84.13}$ 、 D_{50} ($=\mu$)を読み取ると、変動係数 CV は次式で求められる。

$$CV = \frac{1290 - 450}{(2)(880)} \times 100 \approx 48\% \quad \cdots(2.4.2.8)$$

バラツキの情報は標準偏差が持っていることから、変動係数 CV は必要無いと思うかもしれない。 CV を

用いることで、粒子径スケールによらないバラツキの相対的評価が可能となる。たとえば、平均粒子径 $1\ \mu\text{m}$ の炭酸カルシウム粒子を $\pm 10\%$ ($\pm 0.1\ \mu\text{m}$) のバラツキで作製した場合と、平均粒子径 $1000\ \mu\text{m}$ のカリミヨウバン粒子を $\pm 10\%$ ($\pm 100\ \mu\text{m}$) のバラツキで作製した場合とでは、いずれがより粒子径が揃っていると言えるだろうか。一見すると、カリミヨウバンの方が $\pm 100\ \mu\text{m}$ なのでバラツキが大きいのに見える。しかし、それ以前に、カリミヨウバンの方が平均粒子径が大きいから、バラツキの幅が大きく出るのは当然のようにも思える。たんに平均粒子径が大きいからバラツキも大きいというのでは腑に落ちない。そのような場合に、CVが有用である。すなわち、バラツキの絶対値を平均粒子径で割ると、炭酸カルシウムは $(0.1\ \mu\text{m}/1\ \mu\text{m}) \times 100 = 10\%$ 、カリミヨウバンは $(100\ \mu\text{m}/1000\ \mu\text{m}) \times 100 = 10\%$ となる。粒子径の揃い具合は、どちらも同じであるということになる。なお、晶析分野では、変動係数 20%以下の結晶粒子群を均質性の高い単分散結晶(monodisperse crystals)とみなす。また、コロイド化学分野では、10%程度以下を単分散粒子(monodisperse particles)とみなす。

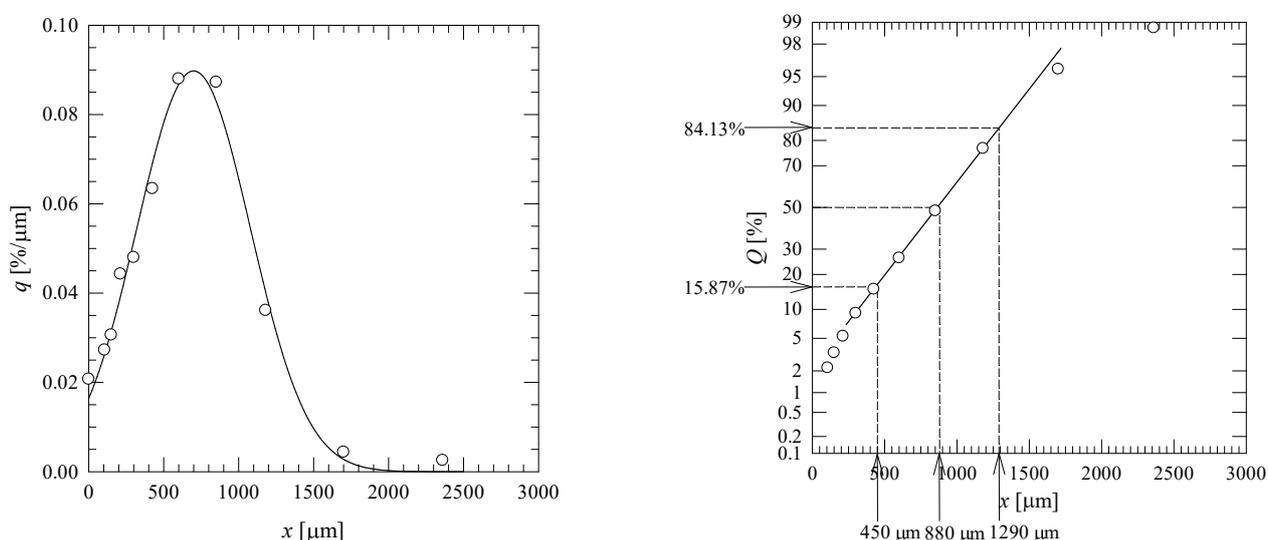


図 2.4.2.1 正規分布式を用いた当てはめ結果(左)と正規確率紙を用いた解析(右) [文献 4]

(q と f , Q と U , x と D_p は同じ)

2.4.3 対数正規分布

正規分布を用いることの問題点として、①分布形状が左右対称性であるために x 軸が負の値を取りうること、②とくに個数基準の場合は、ピーク位置が微小粒子径側に偏りやすく、左右非対称の分布形状になること、が挙げられる。そのような場合は、対数正規分布(lognormal distribution)を用いる。正規確率紙の x 軸を対数軸に置き換えると対数正規確率紙となるので、正規確率紙と同じように分布パラメータを図上で読み取ることができる。

$$f = \frac{1}{\ln \sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\ln D_p - \ln D_{50})^2}{2 \ln^2 \sigma_g} \right] \quad \dots(2.4.3.1)$$

標準偏差 σ_g は、対数 84.13%径 $\ln D_{84.13}$ と対数 50%径 $\ln D_{50} (= \ln \mu)$ の差、あるいは、対数 50%径 $\ln x_{50}$ と対数 15.87%径 $\ln x_{15.87}$ の差で与えられる。

$$\ln \sigma_g = \ln D_{84.13} - \ln D_{50} \quad \cdots(2.4.3.2)$$

$$\ln \sigma_g = \ln D_{50} - \ln D_{15.87} \quad \cdots(2.4.3.3)$$

両式の算術平均を標準偏差 σ_g として採用する。

$$\ln \sigma_g = \frac{(\ln D_{84.13} - \ln D_{50}) + (\ln D_{50} - \ln D_{15.87})}{2} \quad \cdots(2.4.3.4)$$

$$\ln \sigma_g = \frac{\ln D_{84.13} - \ln D_{15.87}}{2} \quad \cdots(2.4.3.5)$$

$$\ln \sigma_g = \ln \left(\frac{D_{84.13}}{D_{15.87}} \right)^{0.5} \quad \cdots(2.4.3.6)$$

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{D_{84.13}}{D_{15.87}}} \quad \cdots(2.4.3.7)$$

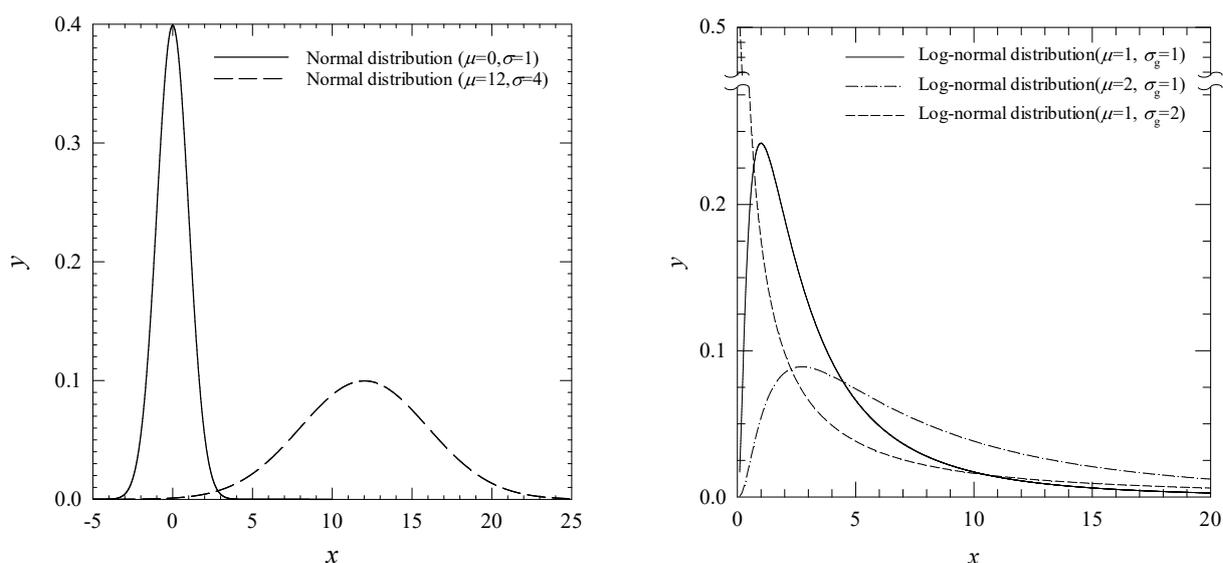


図 2.4.3.1 正規分布(左)と対数正規分布(右)

2.4.4 ロジン・ラムラー分布

正規分布と対数正規分布のいずれの場合も、たとえば微小粒子と粗大粒子が混在して分布形状が多峰性を示す場合は、複数の単峰性分布に分割して個別に平均や標準偏差を解析する必要がある。粉砕物などバラツキが顕著な粒子群には、**ロジン・ラムラー分布(Rosin-Rammler distribution)**が簡便である。

$$(R \text{ が質量分率の場合}) \quad R = \exp(-D_p / D_{pe})^n \quad \cdots(2.4.4.1)$$

$$(R \text{ が百分率の場合}) \quad R = 100 \exp(-D_p / D_{pe})^n \quad \cdots(2.4.4.2)$$

ただし、 n は**均等数(distribution constant)**であり、分布のバラツキの程度を表す。この値が大きいほどバ

ラツキが小さく、分布幅は狭い。 D_{pe} は粒度特性数(absolute size constant)であり、ふるい上曲線の36.8%に相当する代表粒子径であり、平均粒子径に相当する。 R は積算ふるい上分布[-]または[%]。上式を変形すると、次式が導かれる。

$$(R \text{ が質量分率の場合}) \quad \ln\left(\ln\frac{1}{R}\right) = n \ln D_p - n \ln D_{pe} \quad \cdots(2.4.4.3)$$

$$(R \text{ が百分率の場合}) \quad \ln\left(\ln\frac{100}{R}\right) = n \ln D_p - n \ln D_{pe} \quad \cdots(2.4.4.4)$$

$\ln x$ に対して $\ln[\ln(1/R)]$ または $\ln[\ln(100/R)]$ をプロットしたときに直線関係が見出されるならば、傾きより n が、切片より D_{pe} がそれぞれ求まる。ロジン・ラムラープロット(Rosin-Rammler plot)の例を下図に示す。傾きより $n=1.793$ 、切片より $-n \ln D_{pe} = -12.43 \rightarrow D_{pe} = \exp(12.43/1.793) = 1025 \mu\text{m}$ と求められる。ロジン・ラムラー分布は、自然対数を2回作用させた式になっていることから分かるように、バラツキがきわめて大きい粒子群に対しても近似直線に強力に当てはめる点で便利である。

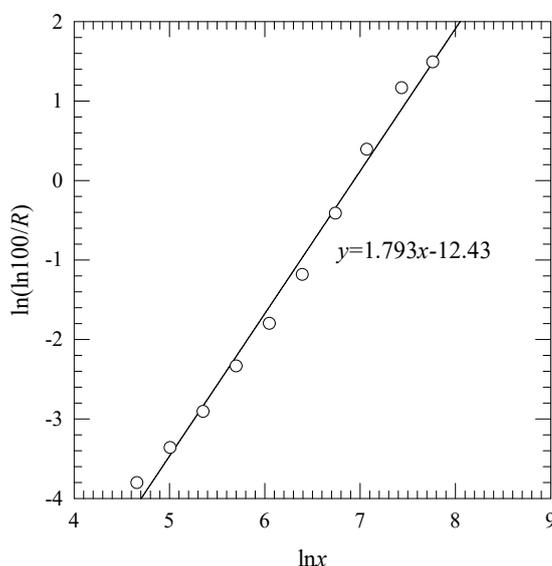


図 2.4.4.1 ロジン・ラムラープロットの例

2.4.5 分布密度関数の数学的定義 [文献 5]

平均頻度分布 $\bar{q}_r(x)$ [1/m] は、ある粒子径幅 Δx [m] あたりに含まれる粒子量の割合 $\Delta Q_r(x)$ [-] で表される。

$$\bar{q}_r(x) = \frac{\Delta Q_r(x)}{\Delta x} \left[= \frac{Q_r(x + \Delta x) - Q_r(x)}{(x + \Delta x) - x} \right] \quad \cdots(2.4.5.1)$$

粒子径幅 Δx [m] を無限小とすることで、頻度分布 $q_r(x)$ [1/m] が導かれる。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{q}_r(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_r(x)}{\Delta x} = \frac{dQ_r(x)}{dx} \left[\equiv q_r(x) \right] \quad \cdots(2.4.5.2)$$

$$\boxed{q_r(x) = \frac{dQ_r(x)}{dx}} \quad \cdots(2.4.5.3)$$

上式の r 値の意味は、 $r=0$ (個数基準)、 1 (長さ基準)、 2 (面積基準)、 3 (質量基準)である。たとえば、球形粒子における個数基準から質量基準および面積基準への変換は、それぞれ次式で表される。

$$q_3(x) = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 \rho_p q_0(x)}{\int_0^\infty \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 \rho_p q_0(x) dx} = \frac{x^3 q_0(x)}{\int_0^\infty x^3 q_0(x) dx} \quad \cdots(2.4.5.4)$$

$$q_2(x) = \frac{4\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 q_0(x)}{\int_0^\infty 4\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 q_0(x) dx} = \frac{x^2 q_0(x)}{\int_0^\infty x^2 q_0(x) dx} \quad \cdots(2.4.5.5)$$

一般的な変換式は、次式で与えられる。

$$q_r(x) = \frac{\phi_r x^r q_0(x)}{\int_0^\infty \phi_r x^r q_0(x) dx} = \frac{x^r q_0(x)}{\int_0^\infty x^r q_0(x) dx} \quad \cdots(2.4.5.6)$$

ただし、 ρ_p は粒子密度[kg/m³]、 ϕ は形状係数[-]。

$q_r(x)$ は**確率密度関数**であり、確率(割合)そのものではないことに留意する必要がある。 $q_r(x)$ に区画幅 dx を乗じたもの(面積)が確率を表す。また、 $\bar{q}_r(x)$ は頻度ヒストグラム(離散量)の総和計算に、 $q_r(x)$ は頻度分布曲線(連続量)の積分計算に用いる。

積算ふるい下分布 $Q_r(x)$ [-] または $U(x)$ は、ある粒子径 x [m] 以下に含まれる累積の粒子量割合を表す。

$$Q_r(x) = \int_0^x q_r(x) dx \quad [\equiv U(x)] \quad \cdots(2.4.5.7)$$

あるいは、総和を用いて表す。

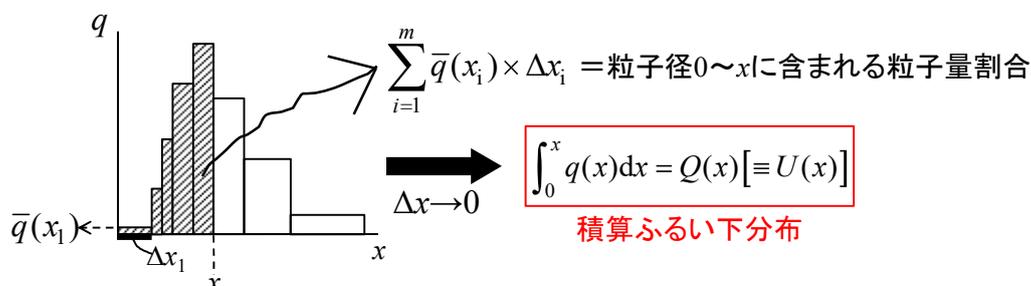
$$Q_r(x) = \sum_{i=1}^m \bar{q}_r(x_i) \Delta x_i \quad \cdots(2.4.5.8)$$

積算ふるい上分布 $1-Q_r(x)$ [-] または $R(x)$ は、ある粒子径 x [m] 以上に含まれる累積の粒子量割合を表す。

$$1-Q_r(x) = \int_x^\infty q_r(x) dx \quad [\equiv R(x)] \quad \cdots(2.4.5.9)$$

あるいは、総和を用いて表す。

$$1-Q_r(x) = \sum_{i=m+1}^\infty \bar{q}_r(x_i) \Delta x_i \quad \cdots(2.4.5.10)$$



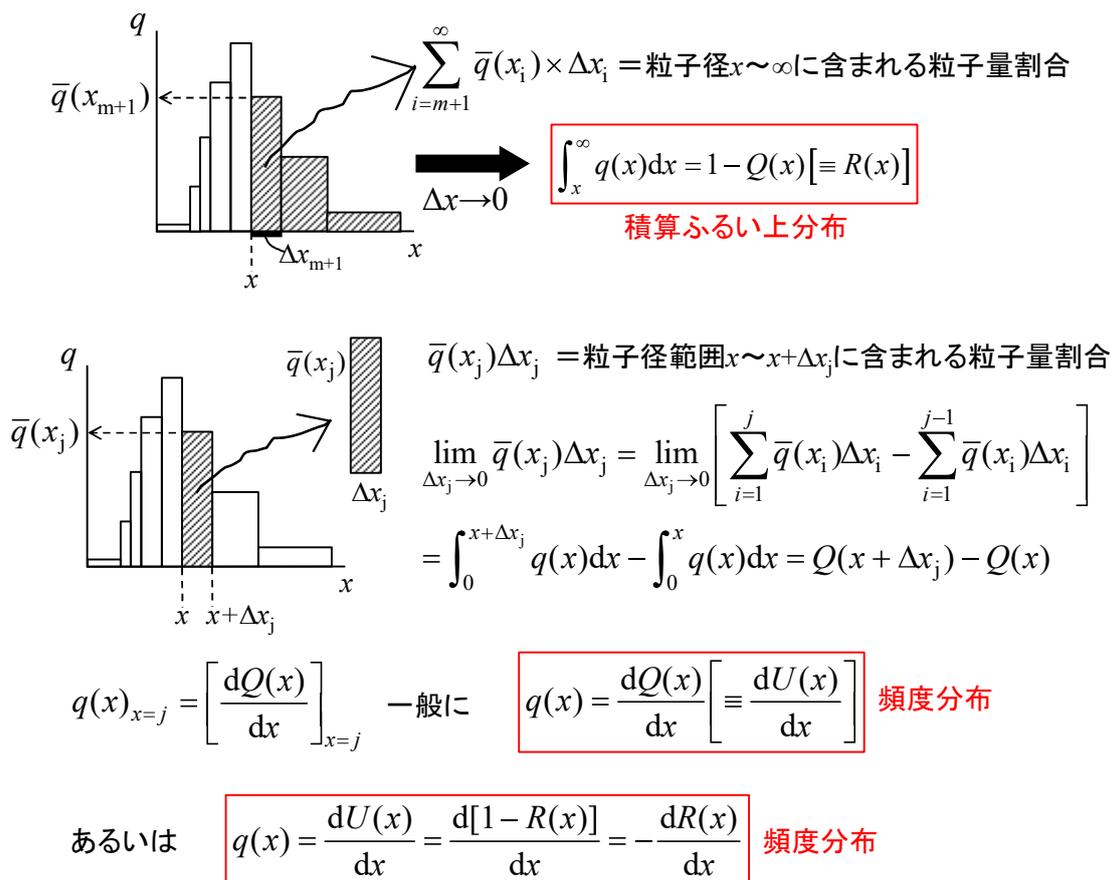


図 2.4.5.1 分布密度関数の説明図

2.4.6 粒子径分布の測定法

①ふるい分け法 数百ミクロン程度以上の粗粒子に用いる。目開きの大きいものから順にふるいを縦に接続して自動または手動でゆする。操作後、ふるいごとに含まれる粉体の質量分率を解析する。

②顕微鏡法 数十ミクロン程度以下の微粒子に用いる。粒子群の投影像を複数枚撮影して写真を引き伸ばし、ノギスや粒子径解析ソフトを用いてフェレー径などの相当径を数百個以上測定する。

③沈降法 数十 μm 程度以下の微粉体に対して用いる。試料粉体 W_0 [kg] と分散剤 m [kg] の懸濁液を V_0 [m^3] 調製し、アンドレアゼンピペット(Andreasen pipette)と呼ばれるシリンダ容器内に注ぐ($t=0$)。ある沈降時間 t_i において、懸濁液 V_i [m^3] を固定された位置より採取する(写真の矢印)。このとき、液面位置と採取位置の差で定義される沈降距離 h_i [m] を目盛りで読む。採取した懸濁液を蒸発乾固させて乾燥粉体の重量 W_i [kg] を秤量し、粒子濃度 C_i [kg/m^3] を求める。なお、分散剤も乾燥粉体に含まれるので、秤量値より分散剤の含有量 $m(V_i/V_0)$ [kg] を差し引く必要がある($C_i = (W_i - mV_i/V_0)/V_i$)。さらに、採取位置における粒子量割合 $U_i (= C_i/C_0)$ とストークス径 $D_{St,i}$ の両方を求める。他の沈降時間で採取した試料も同様に求めて粒子径分布を解析する。累積分布の場合、1回の採取につき1点をプロットできる。

U の意味について、時間 t_i に採取された懸濁液の粒子濃度 C_i は、採取位置における粒子径以下の粒子濃度である。したがって、もとの試料粉体の全粒子濃度 $C_0 (= W_0/V_0)$ との比を



取ると、これは積算ふるい下分布 U_i [-]に相当する($U_i=C_i/C_0$)。したがって、積算ふるい上分布は $(1-U_i)$ [-]となる。ある時間に採取された粒子径以上の粒子群は、すでに採取位置を通過している。その分は、採取位置での粒子濃度 C_i には含まれない。採取粒子のストークス径 $D_{St,i}$ は、沈降距離 h_i と沈降時間 t_i の比で表される終末速度 $u_{t,i}$ をもとに、ストークス式より求める。また、適切な粒子レイノルズ数の範囲にあることを確認する。

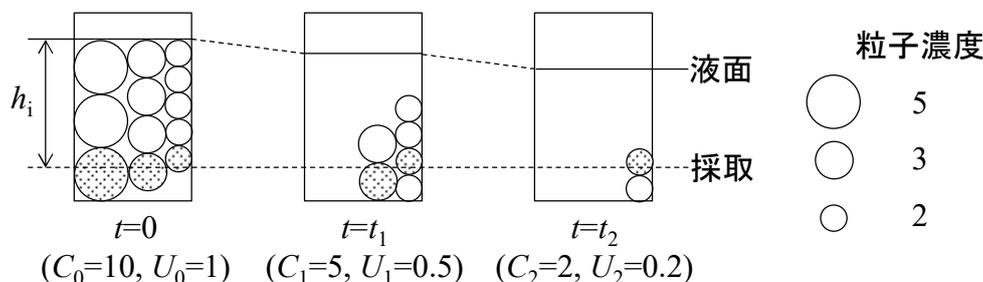


図 2.4.6.1 沈降容器内部液の時間挙動と分布解析の考え方
(採取した分液面が低下するので、沈降距離もその都度変化する。)

④コールター・カウンター法(電気的検知帯法) 測定用電極に空けられた細孔に粒子が通過すると、粒子の体積分だけ電解液が排除され、電気が流れにくくなる。電気抵抗の増大分は、通過した粒子体積に比例するので、これを利用して球相当径を測定する。

⑤動的光散乱法(光子相関法) 液体中に分散させた微粒子は、ランダムなブラウン運動をする。そこへ、レーザーを照射する。微粒子がレーザーを弾く強さ(散乱強度)を計測し、自己相関関数としてデータを平滑化する。このときに得られる拡散係数をストークス・アインシュタインの式に代入して粒子径を計算する。数 nm まで測定可能。

⑥レーザー回折・散乱法 液体中に分散させた粒子にレーザーを照射すると、回折・散乱現象が起こる。これらの強度分布を複数のセンサで検出し、演算部で粒子径分布に読み替える。

【計算例】粒子径分布の測定法

密度 2650 kg/m^3 の砂 5.00 g と分散剤 1.00 g を水 1000 cm^3 に添加し、十分に攪拌した。この懸濁液をアンドレアゼンピペットに仕込み、静置した。20 分後に 10 cm^3 の懸濁液を受け器に採取し、乾燥後の重量を測定したところ、 50 mg であった。このとき、①採取した砂粒子のストークス径 D_{St} [μm]、②積算ふるい下分布 U [%]を求めよ。ただし、沈降距離は 18.5 cm 、水の密度は 1000 kg/m^3 、水の粘度は $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ 、重力加速度は 9.81 m/s^2 とする。(① $13.0 \mu\text{m}$, ② 80%)

$$\textcircled{1} D_{St} = [18\mu u_t / \{g(\rho_p - \rho)\}]^{1/2} = [(18)(1.00 \times 10^{-3}) \{(18.5 \times 10^{-2}) / (20)(60)\} / \{(9.81)(2650 - 1000)\}]^{1/2} = 1.2986 \times 10^{-5} \text{ m} \doteq \underline{13.0 \mu\text{m}}$$

$$Re_p = D_{St} u_t \rho / \mu = (1.2986 \times 10^{-5}) \{(18.5 \times 10^{-2}) / (20)(60)\} (1000) / (1.00 \times 10^{-3}) = 0.002 < 2 \text{ Stokes 域の仮定は、正しい。}$$

$$\textcircled{2} C_i = (W_i - mV_i/V_0) / V_i = \{(50 \times 10^{-3}) - (1.00)(10) / 1000\} / 10 = 0.004 \text{ g/cm}^3$$

$$C_0 = W_0 / V_0 = 5.00 / 1000 = 0.005 \text{ g/cm}^3$$

$$U = C_i / C_0 = 0.004 / 0.005 = 0.8 = \underline{80\%}$$

2.5 平均粒子径

下表に示されるように複数の定義があり、粒子の性状や粒子径分布の種類などに応じて使い分けされる。報告者は、いずれの平均径を用いたのかを明記する必要がある。

表 2.5.1 主な平均粒子径[文献 6]

分類	名称	記号	定義
数学的平均径	算術平均径	D_a	$D_a = \frac{D_1 + D_2 + \dots + D_N}{N}$
	幾何平均径	D_g	$\log D_g = \frac{\log D_1 + \log D_2 + \dots + \log D_N}{N}$
	調和平均径	D_h	$\frac{1}{D_h} = \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \dots + \frac{1}{D_N} \right) / N$
加重平均径	個数平均径	$D_{1,0}$	$D_{1,0} = \frac{\sum n_i D_i}{\sum n_i}$
	長さ平均径	$D_{2,1}$	$D_{2,1} = \frac{\sum n_i D_i^2}{\sum n_i D_i}$
	面積平均径	$D_{3,2}$	$D_{3,2} = \frac{\sum n_i D_i^3}{\sum n_i D_i^2}$
	体積平均径	$D_{4,3}$	$D_{4,3} = \frac{\sum n_i D_i^4}{\sum n_i D_i^3}$
球状粒子径	平均面積径	$D_{S,av}$	$D_{S,av} = \sqrt{\frac{\sum n_i D_i^2}{\sum n_i}}$
	平均体積径	$D_{V,av}$	$D_{V,av} = \sqrt[3]{\frac{\sum n_i D_i^3}{\sum n_i}}$
上記以外	メジアン径	D_{50}	—
	モード径	D_m	—
	比表面積径	D_{ps}	$D_{ps} = \frac{\phi}{S_V} \quad \text{または} \quad D_{ps} = \frac{\phi}{\rho_p S_W}$

2.5.1 数学的平均径

数学的平均径(**mathematics mean diameter**)は、算術平均径 D_a 、幾何平均径 D_g 、調和平均径 D_h に分類される。粒子の総数を $N[-]$ とすると、それぞれ次式で定義される。

$$(\text{算術平均径}) \quad D_a = \frac{D_1 + D_2 + \dots + D_N}{N} \quad \dots(2.5.1.1)$$

$$(\text{幾何平均径}) \quad \log D_g = \frac{\log D_1 + \log D_2 + \dots + \log D_N}{N} \quad \dots(2.5.1.2)$$

$$\text{(調和平均径)} \quad \frac{1}{D_h} = \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \dots + \frac{1}{D_N} \right) / N \quad \dots(2.5.1.3)$$

算術平均径(arithmetic mean diameter)は、粒子径のバラツキが正規分布にしたがう場合に用いる。このことは、算術平均(相加平均)がバラツキの重心に相当することからも理解される。たとえば、1と2と6の算術平均は $(1+2+6)/3=3$ である。いま、これらの数値が直線上にあって1, 2, 6の位置に1 gのおもりがぶら下がっているものとする。位置3からの距離(うでの長さ)とおもりの積で力のモーメント(回転力)を考えると、 $(3-1)(1 \text{ g})+(3-2)(1 \text{ g})=(6-3)(1 \text{ g})$ となってちょうどつりあうことから、算術平均3が重心の位置になっていることが分かる。正規分布の重心の位置は、平均 μ であることから、この μ は算術平均で取ることが望ましいと言える。

幾何平均径(geometric mean diameter)は、粒子径のバラツキが対数正規分布にしたがう場合に用いる。このことは、対数正規分布の平均が $\ln \mu$ で表されることから理解される。対数を作用させることは、数値間のバラツキを見た目上小さくする効果がある。このことから、幾何平均径は、粒子径のバラツキが大きい場合に有効である。たとえばいま、粒子径1 nm($=10^0$ nm)、1 μm ($=10^3$ nm)、1 mm($=10^6$ nm)の粒子が一粒ずつあるものとする。これらの算術平均径を求めると、 $D_a=(10^0+10^3+10^6)/3=333667 \text{ nm} \doteq 333 \mu\text{m}$ となり、粒子径1 nmの存在など歯牙にもかけない計算結果である。一方、幾何平均径を求めると、 $\log_{10} D_g=(\log_{10} 10^0 + \log_{10} 10^3 + \log_{10} 10^6)/3=(0+3+6)/3=3 \rightarrow D_g=10^3 \text{ nm}=1 \mu\text{m}$ となり、粒子径1 nmの存在に配慮した計算結果であることが感じられる。幾何平均(相乗平均)は、真数が同じである場合、べき乗の算術平均に等しい。上の例だと、 D_g のべき乗3は、三つの粒子径のべき乗0, 3, 6の算術平均になっている。このことは、定義式をよく考えれば理解できるであろう。社会科学の分野では、地価の平均上昇率など割合(もとの値からの増減分)を平均する場合に用いる。

調和平均径(harmonic mean diameter)は、粒子充填層を構成する粉体粒子の比表面積径に対して用いることで、充填層の平均比表面積(算術平均)を見積もる場合に用いる。比表面積径の調和平均が比表面積の算術平均に等しいことの証明について、たとえばいま、比表面積径 D_{PS1} , D_{PS2} , D_{PS3} [m]の粒子が1個ずつあるとする。これらの調和平均径 D_h は、次式で表される。

$$\frac{1}{D_h} = \left(\frac{1}{D_{PS1}} + \frac{1}{D_{PS2}} + \frac{1}{D_{PS3}} \right) / 3 \quad \dots(2.5.1.4)$$

いずれも同じ粒子形状であることを仮定すると、次式となる。

$$\frac{\phi}{D_h} = \left(\frac{\phi}{D_{PS1}} + \frac{\phi}{D_{PS2}} + \frac{\phi}{D_{PS3}} \right) / 3 \quad \dots(2.5.1.5)$$

上式の各項は、粒子の比表面積に他ならない。

$$S_{vh} = \frac{S_{V1} + S_{V2} + S_{V3}}{3} \quad \dots(2.5.1.6)$$

したがって、粒子形状が等しい条件下では、各項の形状係数が消去されることから、調和平均径がそのまま平均比表面積を表すことが理解される。このことは、比表面積径が比表面積の逆数になっていることに基づく。

調和平均の利用例としては、速度の平均がある。いま、新大北門から600 m先のうめこまちまで徒歩で出かけるものとする。行きは分速150 m、帰りは3限に授業があるため分速300 mで北門まで戻ったとする。行きと帰りの平均分速は何 m だろうか。算術平均で $(150+300)/2=225$ m/分とやってしまうと間違

いである。所要時間について、行きは $600/150=4$ 分、帰りは $600/300=2$ 分かかる。したがって、往復 1200 m を計 6 分で移動することになるので、 $1200/6=200$ m/分が正しい。この値は、行きと帰りの分速の調和平均を取ることによって求めることができる。これは、速度の単位の分子である距離が基準値(一定値)となっているために起こる。このように、分子の単位が一定となっている場合の平均は、調和平均となる。ここで、分速の代わりに「1 m 進むのにかかる時間」[分/m]を用いる。この場合は、基準値が分母にくるので算術平均を取ることになる。すなわち、 $\{(1/150)+(1/300)\}/2=1/200=0.005$ 分/m となり、これは上で述べた往復 1200 m の平均分速 200 m/分の逆数に等しいから、算術平均でよいことになる。[文献 7]

2.5.2 加重平均径

加重平均径(weighted average diameter)は、**重み付き平均径**とも呼ばれ、第 i 番目の粒子径範囲 ΔD_i における代表粒子径 D_i に重みを乗じた量の総和で表される。重みとは、粒子数 n_i をもとに、個数、長さ、面積、体積(質量)の割合を表現したものである。粒子径範囲と代表粒子径の決め方は任意であり、粒子径分布の章で述べた通りである。重みと加重平均径の定義式を下表に整理する。いずれも重みに粒子径 D_i を乗じた式の総和で表現されている。**個数平均径 $D_{1,0}$** は、おおむね数十 μm 以下の微粒子の場合に用いることが多い。**長さ平均径 $D_{2,1}$** は、アスペクト比の大きい針状粒子の場合に用いることがある。長さ $n_i D_i$ の意味について、代表粒子径 D_i のものが n_i 個ある場合、これを横一列に並べると、その全長が代表長さ $n_i x_i$ になる、ということである。各粒子径範囲における代表径 D_1, D_2, \dots の全長の総和は、 $\sum n_i D_i$ で表される。**面積平均径 $D_{3,2}$** は、投影径を解析する場合に用いることが多い。**体積平均径 $D_{4,3}$** は、おおむね数百 μm 以上の粗大粒子の場合に用いることが多い。なお、 D の添え字の番号は、0(個数)、1(長さ)、2(面積)、3(体積または質量)を表す。

顕微鏡観察による投影像をもとに粒子群のフェレー径を測定し、任意の粒子径範囲ごとの粒子数と加重平均径を解析した結果を下表に示す。個数平均径であれば、粒子数割合を乗じるので、表中のデータと照らし合わせて、妥当な計算結果と言える。一方、体積平均径であれば、粒子数に比して粒子体積、すなわち粒子径の 3 乗に比例する部分の影響が大きくなることを考慮すると、計算結果がより粗大径側に移ることが理解される。

粒子径の基準によって平均径が大きく変わることが分かる。いずれか一方が正しいというのではなく、あくまでその解析方法を選択した中での解にすぎない。粒子径の取り方や測定装置が変わると値は変化する。平均粒子径を報告する際は、第三者が追試できるよう、粒子径の定義や測定法、平均の取り方などの詳細も併せて報告する必要がある。

表 2.5.2.1 加重平均径

基準	個数	長さ	面積	体積
重み	$\frac{n_i}{\sum n_i}$	$\frac{n_i D_i}{\sum n_i D_i}$	$\frac{n_i D_i^2}{\sum n_i D_i^2}$	$\frac{n_i D_i^3}{\sum n_i D_i^3}$
加重平均径	$D_{1,0} = \sum \left(\frac{n_i}{\sum n_i} \cdot D_i \right)$	$D_{2,1} = \sum \left(\frac{n_i D_i}{\sum n_i D_i} \cdot D_i \right)$	$D_{3,2} = \sum \left(\frac{n_i D_i^2}{\sum n_i D_i^2} \cdot D_i \right)$	$D_{4,3} = \sum \left(\frac{n_i D_i^3}{\sum n_i D_i^3} \cdot D_i \right)$
	$D_{1,0} = \frac{\sum n_i D_i}{\sum n_i}$	$D_{2,1} = \frac{\sum n_i D_i^2}{\sum n_i D_i}$	$D_{3,2} = \frac{\sum n_i D_i^3}{\sum n_i D_i^2}$	$D_{4,3} = \frac{\sum n_i D_i^4}{\sum n_i D_i^3}$

表 2.5.2.2 平均粒子径の計算例 [文献 3.8]

ΔD_i [μm]	60~70	50~60	40~50	30~40	20~30	10~20	5~10	0~5
D_i [μm]	65	55	45	35	25	15	7.5	2.5
n_i [-]	87	100	156	660	1750	6200	25600	155000
$n_i D_i$	5655	5500	7020	23100	43750	93000	192000	387500
$n_i D_i^2$	367575	302500	315900	808500	1093750	1395000	1440000	968750
$n_i D_i^3$	23892375	16637500	14215500	28297500	27343750	20925000	10800000	2421875
$n_i D_i^4$	1553004375	915062500	639697500	990412500	683593750	313875000	81000000	6054688
Σn_i	189553							
$\Sigma n_i D_i$	757525							
$\Sigma n_i D_i^2$	6691975							
$\Sigma n_i D_i^3$	144533500							
$\Sigma n_i D_i^4$	5182700313							
$n_i / \Sigma n_i$	0.000458975	0.000527557	0.000822989	0.003481876	0.009232246	0.03270853	0.135054576	0.817713252
$n_i D_i / \Sigma n_i D_i$	0.0074651	0.007260486	0.009267021	0.030494043	0.05775387	0.122768225	0.253456982	0.511534273
$n_i D_i^2 / \Sigma n_i D_i^2$	0.054927731	0.045203397	0.047205795	0.120816351	0.163442033	0.208458639	0.215183111	0.144762944
$n_i D_i^3 / \Sigma n_i D_i^3$	0.165306832	0.115111722	0.098354361	0.19578506	0.189186244	0.144776125	0.074723161	0.016756496
$D_{1,0}$ [μm]	4.00							
$D_{2,1}$ [μm]	8.83							
$D_{3,2}$ [μm]	21.6							
$D_{4,3}$ [μm]	35.8							

$$(\text{個数平均径}) \quad D_{1,0} = \frac{(87 \times 65) + (100 \times 55) + \dots + (155000 \times 2.5)}{87 + 100 + \dots + 155000} \approx 4.00 \mu\text{m}$$

$$(\text{長さ平均径}) \quad D_{2,1} = \frac{(87 \times 65^2) + (100 \times 55^2) + \dots + (155000 \times 2.5^2)}{(87 \times 65) + (100 \times 55) + \dots + (155000 \times 2.5)} \approx 8.83 \mu\text{m}$$

$$(\text{面積平均径}) \quad D_{3,2} = \frac{(87 \times 65^3) + (100 \times 55^3) + \dots + (155000 \times 2.5^3)}{(87 \times 65^2) + (100 \times 55^2) + \dots + (155000 \times 2.5^2)} \approx 21.6 \mu\text{m}$$

$$(\text{体積平均径}) \quad D_{4,3} = \frac{(87 \times 65^4) + (100 \times 55^4) + \dots + (155000 \times 2.5^4)}{(87 \times 65^3) + (100 \times 55^3) + \dots + (155000 \times 2.5^3)} \approx 35.8 \mu\text{m}$$

2.5.3 球状粒子径

平均体積径(mean volume diameter) $D_{V,av}$ は、いびつな粒子群の平均体積に等しい単一球の粒子径で定義される。粒子群がすべて同じ形状のとき、全粒子の平均体積 V_{av} は、次式で表される。

$$V_{av} = \frac{\sum n_i V_i}{\sum n_i} \quad \dots(2.5.3.1)$$

$$V_{av} = \frac{\sum n_i \phi_V D_i^3}{\sum n_i} \quad \dots(2.5.3.2)$$

上式と等しい体積 V_{av} をもつ単一粒子の粒子径が平均体積径 $D_{V,av}$ であることから、次式が成り立つ。

$$V_{av} = \phi_V D_{V,av}^3 \quad \dots(2.5.3.3)$$

上式に代入すると、平均体積径 $D_{V,av}$ を得る。

$$\phi_V D_{V,av}^3 = \frac{\sum n_i \phi_V D_i^3}{\sum n_i} \quad \dots(2.5.3.4)$$

$$D_{V,av} = \sqrt[3]{\frac{\sum n_i D_i^3}{\sum n_i}} \quad \dots(2.5.3.5)$$

平均表面積径(mean surface diameter) $D_{S,av}$ は、いびつな粒子群の平均表面積に等しい単一球の粒子径で定義される。上記と同様の考え方に基づいて導かれる。

$$D_{S,av} = \sqrt{\frac{\sum n_i D_i^2}{\sum n_i}} \quad \dots(2.5.3.6)$$

【計算例】平均粒子径

代表径 1200 μm の粒子が 3 個、800 μm の粒子が 2 個、400 μm の粒子が 5 個ある。これらを混合した場合の①個数平均径 $D_{1,0}$ [μm]、②長さ平均径 $D_{2,1}$ [μm]、③面積平均径 $D_{3,2}$ [μm]、④体積平均径 $D_{4,3}$ [μm]、⑤平均表面積径 $D_{S,av}$ [μm]、⑥平均体積径 $D_{V,av}$ [μm]を求めよ。(①720 μm , ②889 μm , ③1020 μm , ④1098 μm , ⑤800 μm , ⑥867 μm)

$$\textcircled{1} D_{1,0} = \frac{\sum n_i D_i}{\sum n_i} = \frac{(3)(1200) + (2)(800) + (5)(400)}{(3+2+5)} = \boxed{720 \mu\text{m}}$$

$$\textcircled{2} D_{2,1} = \frac{\sum n_i D_i^2}{\sum n_i D_i} = \frac{(3)(1200)^2 + (2)(800)^2 + (5)(400)^2}{(3)(1200) + (2)(800) + (5)(400)} = 888.8 \mu\text{m} \doteq \boxed{889 \mu\text{m}}$$

$$\textcircled{3} D_{3,2} = \frac{\sum n_i D_i^3}{\sum n_i D_i^2} = \frac{(3)(1200)^3 + (2)(800)^3 + (5)(400)^3}{(3)(1200)^2 + (2)(800)^2 + (5)(400)^2} = \boxed{1020 \mu\text{m}}$$

$$\textcircled{4} D_{4,3} = \frac{\sum n_i D_i^4}{\sum n_i D_i^3} = \frac{(3)(1200)^4 + (2)(800)^4 + (5)(400)^4}{(3)(1200)^3 + (2)(800)^3 + (5)(400)^3} = 1098.0 \mu\text{m} \doteq \boxed{1098 \mu\text{m}}$$

$$\textcircled{5} D_{S,av} = \left(\frac{\sum n_i D_i^2}{\sum n_i} \right)^{1/2} = \left[\frac{(3)(1200)^2 + (2)(800)^2 + (5)(400)^2}{(3+2+5)} \right]^{1/2} = \boxed{800 \mu\text{m}}$$

$$\textcircled{6} D_{V,av} = \left(\frac{\sum n_i D_i^3}{\sum n_i} \right)^{1/3} = \left[\frac{(3)(1200)^3 + (2)(800)^3 + (5)(400)^3}{(3+2+5)} \right]^{1/3} = 867.4 \mu\text{m} \doteq \boxed{867 \mu\text{m}}$$

【問題】平均粒子径

代表径 10.0 mm の粒子が 1 個、1.00 mm の粒子が 3 個、0.100 mm の粒子が 6 個ある。これらを混合した場合の①個数平均径 $D_{1,0}$ [mm]、②長さ平均径 $D_{2,1}$ [mm]、③面積平均径 $D_{3,2}$ [mm]、④体積平均径 $D_{4,3}$ [mm]、⑤平均表面積径 $D_{S,av}$ [mm]、⑥平均体積径 $D_{V,av}$ [mm]を求めよ。(①1.36 mm, ②7.58 mm, ③9.73 mm, ④9.97 mm, ⑤3.21 mm, ⑥4.65 mm)

2. 6 空隙率

空隙(げき)率あるいは空間率 ε (porosity)は、粒子充填層の全体積 V_b [m^3]に対する空隙体積 V_e [m^3]の比で定義される。

$$\varepsilon \equiv \frac{V_e}{V_b} \quad \dots(2.6.1)$$

空隙体積 V_e を直接測定することは難しい。そこで、 V_e を充填層体積 V_b と充填層内の粒子体積 V_p の差($V_b - V_p$)に置き換える。

$$\varepsilon = \frac{V_b - V_p}{V_b} \quad \dots(2.6.2)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{V_p}{V_b} \quad \cdots(2.6.3)$$

充填層体積 V_b は、充填層の形状を円柱と仮定すると、充填層の断面積 A [m²] と層高 L [m] を用いて次式で表される。

$$V_b = AL \quad \cdots(2.6.4)$$

粒子体積 V_p は、粒子重量 W_p [kg] と粒子密度 ρ_p [kg/m³] を用いて次式で表される。

$$V_p = \frac{W_p}{\rho_p} \quad \cdots(2.6.5)$$

V_b と V_p の式を ε の式に代入すると、充填層構造の情報が含まれた空隙率を得る。

$$\varepsilon = 1 - \frac{W_p}{\rho_p AL} \quad \cdots(2.6.6)$$

【計算例】空隙率

断面積 3.00 m² の貯槽に粒子密度 2.65 t/m³ の粉体 39.0 t を深さ 20.0 m で充填した。貯槽内の空隙率 ε を求めよ。(0.755)

$$\varepsilon = (V_b - V_p)/V_b = 1 - (V_p/V_b) = 1 - (W_p/\rho_p)/(AL) = 1 - [(39.0 \times 10^3)/(2.65 \times 10^3)]/[(3.00)(20.0)] = 0.75471 \doteq \boxed{0.755}$$

【問題】空隙率

断面積 2.00 cm² の容器に粒子密度 2.65 g/cm³ の粉体 1.30 g を厚さ 8.00 mm で充填した。充填層の空隙率 ε を求めよ。(0.693)

2. 7 比表面積

2.7.1 定義

体積基準の比表面積 S_v [m²/m³] または質量基準の比表面積 S_w [m²/kg] は、次式のように導かれる。

$$S_v = S_p/V_p = (\phi_s D_p^2)/(\phi_s D_p^3) = \phi/D_{ps} \quad \cdots(2.7.1.1)$$

$$S_w = S_p/(\rho_p V_p) = \phi/(\rho_p D_{ps}) \quad \cdots(2.7.1.2)$$

ただし、 D_{ps} は比表面積[m]。

カルマンの形状係数 ϕ_s を用いる場合は、次式で表される。

$$S_v = 6/(\phi_s D_p) \quad \cdots(2.7.1.3)$$

$$S_w = 6/(\phi_s \rho_p D_p) \quad \cdots(2.7.1.4)$$

粒子充填層体積基準の比表面積 S_b [m²/m³-bed] は、次式のように導かれる。

$$S_b = S_v[V_b(1-\varepsilon)/V_b] = S_v(1-\varepsilon) \quad \cdots(2.7.1.5)$$

ただし、 ε は空隙率[-]。

【計算例】比表面積

粒子密度 5.00 t/m^3 、比表面積形状係数 6.00 、比表面積径 $100 \mu\text{m}$ の粉体を貯槽に充填したところ、貯槽内の空隙率は 0.500 であった。このとき、①体積基準の比表面積 $S_v [\text{m}^2/\text{m}^3]$ 、②質量基準の比表面積 $S_w [\text{m}^2/\text{kg}]$ 、③充填層体積基準の比表面積 $S_b [\text{m}^2/\text{m}^3\text{-bed}]$ を求めよ。(① $6.00 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{m}^3$ 、② $12.0 \text{ m}^2/\text{kg}$ 、③ $1.20 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{m}^3$)

$$\textcircled{1} S_v = \phi / D_{ps} = 6.00 / (100 \times 10^{-6}) = \boxed{6.00 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{m}^3}$$

$$\textcircled{2} S_w = S_v / \rho_p = (6.00 \times 10^4) / (5.00 \times 10^3) = \boxed{12.0 \text{ m}^2/\text{kg}}$$

$$\textcircled{3} S_b = S_v (1 - \varepsilon) = (6.00 \times 10^4) (1 - 0.500) = \boxed{1.20 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{m}^3}$$

【問題】比表面積

粒子密度 2650 kg/m^3 、比表面積形状係数 5.30 、比表面積径 1.00 mm の粉体を容器に充填したところ、充填層の空隙率は 0.650 であった。①体積基準の比表面積 $S_v [\text{m}^2/\text{m}^3]$ 、②質量基準の比表面積 $S_w [\text{m}^2/\text{kg}]$ 、③充填層体積基準の比表面積 $S_b [\text{m}^2/\text{m}^3\text{-bed}]$ を求めよ。(① $5300 \text{ m}^2/\text{m}^3$ 、② $2.00 \text{ m}^2/\text{kg}$ 、③ $1855 \text{ m}^2/\text{m}^3$)

2.7.2 比表面積の測定法

①透過法 粉体層内を流体が流れる現象を透過という。粉体層を構築している試料粉体の体積基準比表面積 $S_v [\text{m}^2/\text{m}^3]$ は、次のコゼニー・カルマンの式(Kozeny-Carman's equation)で与えられる。

$$S_v = \sqrt{\frac{\Delta p \varepsilon^3}{5 \mu u L (1 - \varepsilon)^2}} \quad \cdots(2.7.2.1)$$

$$u = \frac{V}{At} \quad \cdots(2.7.2.2)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{W_p}{\rho_p AL} \quad \cdots(2.7.2.3)$$

ただし、 A は粉体層の断面積 $[\text{m}^2]$ 、 L は粉体層厚み $[\text{m}]$ 、 Δp は圧力損失 $[\text{Pa}]$ 、 t は透過時間 $[\text{s}]$ 、 V は流体体積 $[\text{m}^3]$ 、 W_p は試料粉体の質量 $[\text{kg}]$ 、 ε は空隙率 $[-]$ 、 μ は流体粘度 $[\text{Pa}\cdot\text{s}]$ 、 ρ_p は粒子密度 $[\text{kg}/\text{m}^3]$ 。

断面積 A や厚み L が分かっている試料粉体層に体積 V の流体を圧力損失 Δp で流して透過時間 t を測定すると比表面積 S_v を求めることができる。

【計算例】比表面積の測定法(透過法)

断面積 1.00 cm^2 の空気透過用の容器に、粒子密度 5.00 g/cm^3 の球粒子 0.500 g を 1.00 cm の厚さで充填した。いま、 1000 Pa の圧力差で粘度 $18.2 \mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ の空気を 24.0 cm^3 透過させたとき、透過時間は 8.00 秒であった。①体積基準比表面積 $S_v [\text{m}^2/\text{m}^3]$ 、②比表面積径 $D_{ps} [\mu\text{m}]$ を求めよ。ただし、粒子充填層内の流動状態は層流であるものとする。(① $1.63 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{m}^3$ 、② $3.67 \mu\text{m}$)

$$\textcircled{1} \varepsilon = 1 - W_p / (\rho_p AL) = 1 - [(0.500 \times 10^{-3}) / \{(5.00 \times 10^3)(1.00 \times 10^{-4})(1.00 \times 10^{-2})\}] = 0.900$$

$$Q = V/t = 24.0/8.00 = 3.00 \text{ cm}^3/\text{s} = 3.00 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$u = Q/A = 3.00/1.00 = 3.00 \text{ cm/s} = 3.00 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

$$S_v = [\Delta P \varepsilon^3 / \{k L \mu u (1 - \varepsilon)^2\}]^{1/2} = [(1000)(0.900)^3 / \{(5)(1.00 \times 10^{-2})(18.2 \times 10^{-6})(3.00 \times 10^{-2})(1 - 0.900)^2\}]^{1/2}$$

$$= 1.6341 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{m}^3 \doteq \boxed{1.63 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{m}^3}$$

$$\textcircled{2} D_{ps} = \phi / S_v = 6 / (1.6341 \times 10^6) = 3.6717 \times 10^{-6} \text{ m} \doteq \boxed{3.67 \mu\text{m}}$$

【問題】 比表面積の測定法(透過法)

断面積 1.00 cm² の空気透過用の容器に、粒子密度 2.65 g/cm³ の球粒子 0.500 g を 1.00 cm の厚さで充填した。いま、1000 Pa の圧力差で粘度 18.2 μPa・s の空気を 24.0 cm³ 透過させたとき、透過時間は 12.0 秒であった。①体積基準比表面積 S_v [m²/m³]、②比表面積径 D_{ps} [μm] を求めよ。ただし、粒子充填層内の流動状態は層流であるものとする。(① 9.08×10^5 m²/m³, ②6.61 μm)

②吸着法 試料粉体の粒子表面に分子寸法の分かっている不活性ガスを吸着させて、吸着量をもとに質量基準比表面積 S_w [m²/kg] を次式より求める。

$$S_w = \frac{S N_A V_m}{V_0 W_p} \quad \dots(2.7.2.4)$$

ただし、 N_A はアボガドロ数[1/mol]、 S は不活性ガスの分子占有断面積[m²](既知)、 V_0 は標準状態の気体体積[m³/mol](=22.4 L/mol)、 V_m は単分子層吸着量[m³]、 W_p は粒子質量[kg]。

単分子層吸着量 V_m の解析には、多分子層吸着に関する **BET の式(BET equation)** を用いる。

$$\text{(多点法)} \quad \frac{P}{V(P_0 - P)} = \frac{1}{V_m C} + \left(\frac{C-1}{V_m C} \right) \frac{P}{P_0} \quad \dots(2.7.2.5)$$

ただし、 C は定数、 P は平衡圧[Pa]、 P_0 は飽和蒸気圧[Pa]、 V は吸着ガスの体積[m³]。

$C \gg 1$ のとき $1/C \approx 0$ 、 $(C-1)/C = 1 - (1/C) \approx 1$ が成り立つことから、上式は次式で表される。

$$\text{(一点法)} \quad \frac{P}{V(P_0 - P)} = \left(\frac{1}{V_m} \right) \frac{P}{P_0} \quad \dots(2.7.2.6)$$

相対圧 P/P_0 に対応する吸着量 V を測定する。上の 2 式のいずれかを用いてプロットし、傾きと切片より単分子層吸着量 V_m を求める。さらには、比表面積 S_w の式に代入する。一点法は、1 回の測定で済むため簡便であるが、信頼性に問題がある場合は多点法が望ましい。

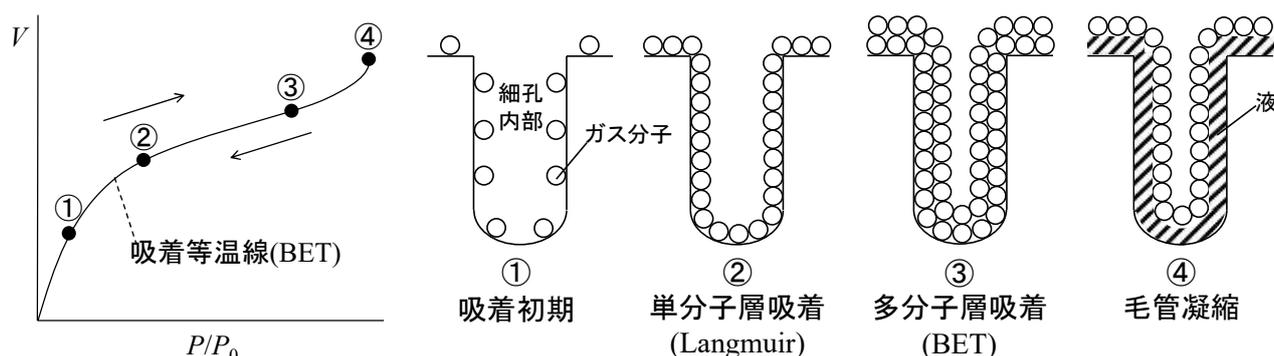


図 2.7.2.1 細孔内の吸着挙動 [文献 9]

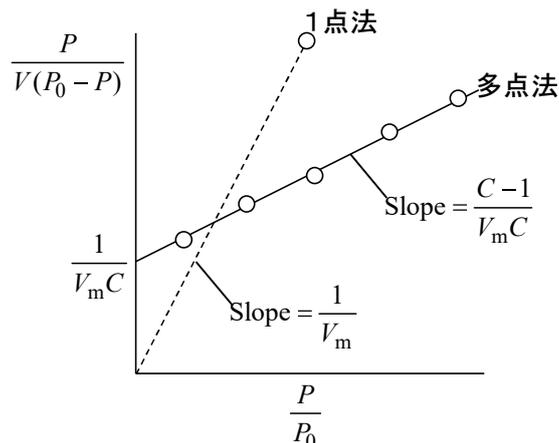


図 2.7.2.2 BET プロットの概略

【計算例】比表面積の測定法(吸着法)

球状の活性炭粒子 1.50 g に窒素ガスを吸着させたところ、下表の結果が得られた。①活性炭の比表面積 S_w [m^2/kg]と②比表面積径 D_{ps} [nm]を BET 式により求めよ。ただし、活性炭の密度 800 kg/m^3 、窒素の飽和蒸気圧 101.33 kPa 、窒素ガスの分子占有断面積 $17.0 \times 10^{-20} \text{ m}^2$ 、アボガドロ数 6.02×10^{23} とする。(① $3.84 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{kg}$, ② 19.5 nm)

窒素ガスの平衡圧 P [kPa]	8.96	11.87	15.44
窒素ガスの吸着量 V [m^3]	1.230×10^{-4}	1.321×10^{-4}	1.395×10^{-4}
$P/[V(P_0 - P)]$	788.6	1004	1288
P/P_0	0.08842	0.1171	0.1523

$(C-1)/V_m C = 7827$ (傾き)、 $1/(V_m C) = 93.29$ (切片)

$(C-1)(93.29) = 7827$

$C = (7827/93.29) + 1 = 84.89$

$V_m = 1/(93.29)(84.89) = 1.262 \times 10^{-4} \text{ m}^3$

$S_w = S_N A V_m / (V_0 W_p) = (17.0 \times 10^{-20})(6.02 \times 10^{23})(1.262 \times 10^{-4}) / [(22.4 \times 10^{-3})(1.50 \times 10^{-3})] = 3.8438 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{kg}$
 $\doteq 3.84 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{kg}$

$D_{ps} = 6/(\rho_p S_w) = 6/[(800)(3.8438 \times 10^5)] = 1.9511 \times 10^{-8} \text{ m} \doteq 19.5 \text{ nm}$

2. 8 濡れ性

2.8.1 接触角と界面張力

科学的な意味での「濡れる」・「濡れない」とは、気液固界面における親和性(なじみやすさ)の良し悪しを表す。たとえば、雨合羽(あまがっぱ)の素材は、雨水を弾く撥水性のものである。この場合は、水に対する雨合羽の親和性が低い、すなわち濡れにくい方が望ましいということになる。一方、新聞紙の場合は、インキが紙面にしっかりとしみこんで、印字がかすまないことである。この場合は、紙に対するインキの親和性が高い、すなわち濡れやすい方が望ましいということになる。**濡れ(wetting)**の定量的な指標は、**接触角(contact angle)** θ で与えられる。完全に濡れる場合は接触角 0° 、まったく濡れない場合は 180° となる。

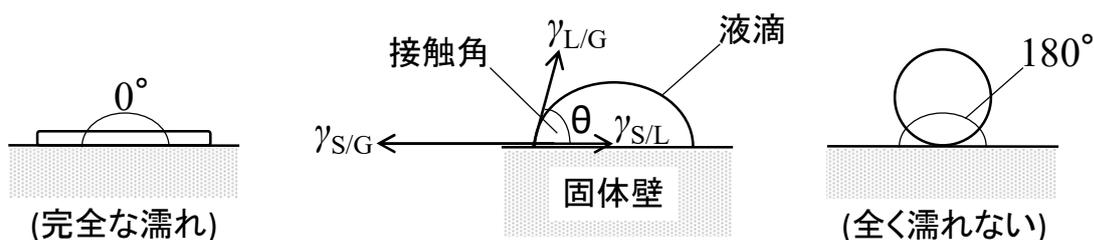


図 2.8.1.1 接触角の説明図

いま、ある固体壁に液体を1滴垂らしたとする。このときの接触角 θ は、気液固間の3種の界面張力 γ [N/m] または [J/m²] のバランスで決まる。これら界面張力のつり合い式をヤングの式(Young's equation)という。

$$\gamma_{S/G} = \gamma_{L/G} \cos \theta + \gamma_{S/L} \quad \cdots(2.8.1.1)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\gamma_{S/G} - \gamma_{S/L}}{\gamma_{L/G}} \right) \quad \cdots(2.8.1.2)$$

ただし、添え字 S/G は気固間、L/G は気液間、S/L は固液間。

それぞれの界面張力は、気液固相の条件によって異なり、これらの組み合わせで接触角が決まる。そうすることで、種々の物質間に対する親和性を定量的に評価することができる。

界面張力(surface tension) γ [N/m] または [J/m²] とは、界面を広げるのに必要なエネルギーのことである。石鹼水に浸した幅 l [m] の金属棒をゆっくり上げると液膜が生成する。液膜、すなわち気液界面は、縮もうとする。これは、液膜にとって、界面が生成しない方が熱力学的に安定だからである。界面が縮もうとする力 $2l\gamma$ [N] に抗して距離 dx [m] だけ広げるのに必要な仕事 dw [N·m] は、次式で表される。

$$dw = 2l\gamma dx \quad \cdots(2.8.1.3)$$

上式において、2を乗じるのは、液膜の表と裏の両面を考慮するためである。

膜面積 A [m²] を用いると、界面張力 γ は次式で表される。

$$\gamma = \frac{dw}{dA} \quad \cdots(2.8.1.4)$$

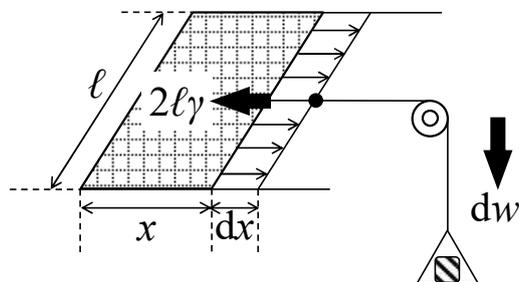


図 2.8.1.2 界面張力の説明図 [文献 10]

2.8.2 毛管上昇

毛細管を液体の中に差し込むと、液体と毛細管壁の親和性が良好であれば、液は管壁をよく濡らして

毛細管内を上昇する。液体の密度を ρ_f [kg/m³]、毛細管の半径を r [m]、内径の周長を S [m] とすると、液柱の重量 W [kg] と界面張力のつり合いより毛管上昇高さ h [m] が導かれる。

$$W = (\gamma \cos \theta) S \quad \cdots (2.8.2.1)$$

$$\pi r^2 h \rho_f g = 2 \pi r \gamma \cos \theta \quad \cdots (2.8.2.2)$$

$$h = \frac{2 \gamma \cos \theta}{r \rho_f g} \quad \cdots (2.8.2.3)$$

この値が大きい程、管壁に対する液の親和性が高いことを意味する。

粉体の場合は、毛細管の底面を布や網で覆って粉体を充填したものを液面に浸す。液体は、界面張力によって粒子間隙を通して吸い上げられ、圧力損失 Δp [Pa] を生じる。

$$\pi r^2 \Delta p = 2 \pi r \gamma \cos \theta \quad \cdots (2.8.2.4)$$

上式の Δp は、粒子間隙を仮想的な直円管流路とみなすと、円管内流動における圧力損失 Δp に相当する。この損失分は、粉体層内の流れを層流と仮定すると、次のハーゲン・ポアズイユ式(Hagen-Poiseuille's equation)で表される。

$$\Delta p = \frac{8 \mu h Q}{\pi r^4} \quad \cdots (2.8.2.5)$$

上式を式(2.8.2.4)に代入すると、毛管上昇高さ h [m] を得る。

$$\pi r^2 \left(\frac{8 \mu h Q}{\pi r^4} \right) = 2 \pi r \gamma \cos \theta \quad \cdots (2.8.2.6)$$

$$h = \frac{\pi r^3 \gamma \cos \theta}{4 \mu Q} \quad \cdots (2.8.2.7)$$

$$h = \frac{r \gamma \cos \theta}{4 \mu (Q / \pi r^2)} \quad \cdots (2.8.2.8)$$

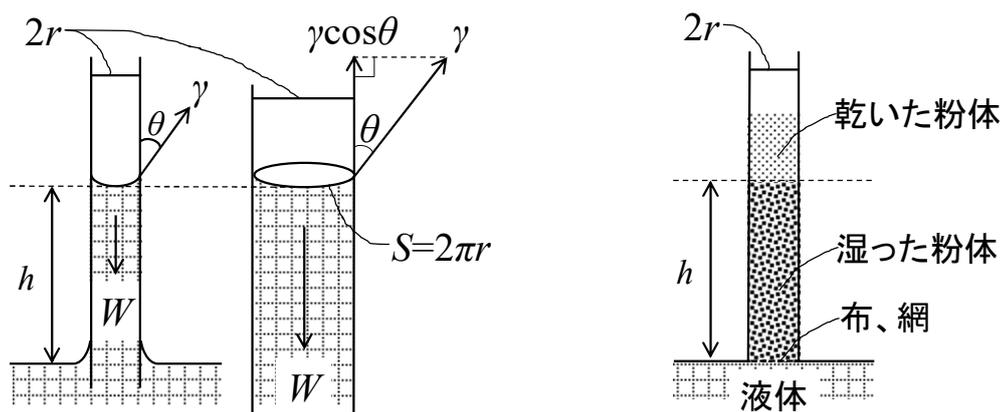
$$h = \frac{r \gamma \cos \theta}{4 \mu \bar{u}} \quad \cdots (2.8.2.9)$$

$$h = \frac{r \gamma \cos \theta}{4 \mu (h/t)} \quad \cdots (2.8.2.10)$$

$$h = \sqrt{\frac{r \gamma \cos \theta}{2 \mu} t} \quad \cdots (2.8.2.11)$$

上式は、印刷分野におけるインキの紙への浸透速度を表すルーカス・ウォッシュバーンの式(Lucas-Washburn's equation)として知られている。(h は浸透深さ。時間 t で割れば速度になる。)

接触角の解析方法について、界面張力 γ が既知、かつ粉体を完全に濡らす液体($\cos \theta = 1$ 、エタノールなど)を用いて h と t の相関を取ると、毛細管半径 r が分かる。この r を上式に代入しておき、調査対象の液体(γ は既知)に変更して h と t の相関を取ると、接触角 θ が求まる。



(左) 図 2.8.2.1 液体の毛管上昇

(右) 図 2.8.2.2 粉体を介した毛管上昇

参考文献

- [1] 椿淳一郎, 鈴木道隆, 神田良照; 入門 粒子・粉体工学 改訂 2 版, 日刊工業新聞社(2016), p.6
- [2] 粉体工学研究会編; 粉体粒度測定法, 養賢堂(1965), p.2
- [3] 三輪茂雄; 粉体工学通論, 日刊工業新聞社(1981), p.6
- [4] J.W. Mullin; Crystallization 4th Ed., Butterworth-Heinemann (2001), pp.78-85
- [5] 粉体工学会編; 粉体の基礎物性(粉体工学叢書 1), 日刊工業新聞社(2005), 1.2.1 章
- [6] 今木精康; 粉体工学演習, コロナ社(1987), p.12
- [7] 張興和; 平均の意味と正確な計算方法に関する浅見, 旭川大学経済学部紀要 **73**, (2014)1-14
- [8] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), p.104
- [9] 島津製作所編; 粉博士のやさしい粉講座(中級コース 2)
<https://www.an.shimadzu.co.jp/powder/lecture/middle/m02.htm>(2020年4月7日閲覧)
- [10] 北原文雄; 界面・コロイド化学の基礎, 講談社サイエンティフィク(1994), p.10

3. 粉粒体の運動

3. 1 自由沈降

3.1.1 運動方程式

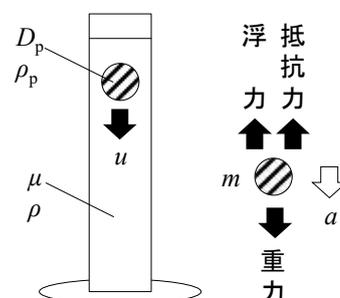
粒子径 D_p [m]、密度 ρ_p [kg/m³]の単一球粒子が粘度 μ [Pa·s]、密度 ρ [kg/m³]の静止している液体中を沈降速度 u [m/s]で自由沈降(free settling)するとき、沈降粒子の運動方程式は次式で表される。

$$\frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p \frac{du}{dt} = \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p g - \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho g - C_D \frac{\pi D_p^2}{4} \frac{\rho u^2}{2} \quad \dots(3.1.1.1)$$

ただし、 t は沈降時間[s]、 C_D は抵抗係数[-]、 g は重力加速度[m/s²]。

上式の左辺は慣性力、右辺は左から順に重力、浮力、抵抗力である。慣性

力は、粒子重量と加速度の積で表される($F=ma$)。浮力は、粒子が液体の中に入ることによってかさが増す分の液重量が沈降粒子に対して垂直上向きに作用する。抵抗力は、投影面積(粒子の大きさに相当)と運動エネルギー(沈降速度に相当)に比例し、沈降粒子に対して垂直上向きに作用する。抵抗力がこれらの物理量に比例することは、自分が沈降粒子になったとして想像してみると、理解できるであろう。なお、運動エネルギー項の速度 u は相対速度であり、流体が動いている場合は、補正が必要となる。比例定数である抵抗係数(drag coefficient) C_D [-]を用いることで、比例式を等式で表すことができる。抵抗係数は、粒子レイノルズ数 Re_p [-]の関数であり、次式のように場合分けされる。



(a)Stokes 域($Re_p < 2$)のとき $C_D = \frac{24}{Re_p} \quad \dots(3.1.1.2)$

(b)Allen 域($2 < Re_p < 500$)のとき $C_D = \frac{10}{\sqrt{Re_p}} \quad \dots(3.1.1.3)$

(c)Newton 域($500 < Re_p$)のとき $C_D = 0.44 \quad \dots(3.1.1.4)$

粒子レイノルズ数 Re_p [-]は、粒子周りの流体の慣性力 ma と粒子周りの流体の粘性力 τA の比 $ma/\tau A$ で定義される。慣性力 $ma = \rho V(du/dt) \propto \rho D_p^3(u/(D_p/u)) = \rho D_p^2 u^2$ 、粘性力 $\tau A \propto \mu(u/D_p) D_p^2 = \mu u D_p$ であることから、粒子レイノルズ数 Re_p [-]は、次式で表される。

$$Re_p = \frac{D_p u \rho}{\mu} \quad \dots(3.1.1.5)$$

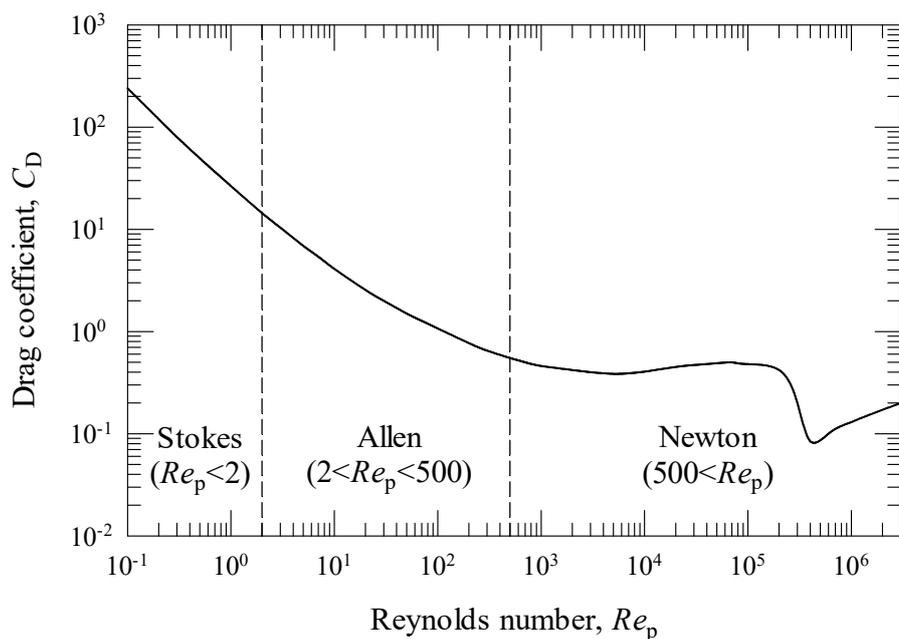


図 3.1.1.1 抵抗係数と粒子レイノルズ数の関係(球粒子の場合) [文献 1]

- ① 適当な沈降領域を仮定して終末速度を求める。(沈降粒子がナノ～マイクロン寸法であれば Stokes 域、ミリ寸法であれば Newton 域、それらの中間であれば Allen 域を仮定してみよ。)
- ② ①の結果をもとに粒子レイノルズ数を計算する。
- ③ ②の結果が適切な範囲に入っていれば計算終了、そうでなければ別の沈降領域を仮定して再計算する。

3.1.2 終末速度

自由沈降する球粒子が等速度運動する場合、運動方程式の加速度を 0 とおき、沈降速度 u を終末速度 u_t に置き換える。さらに、抵抗係数 C_D の式を運動方程式に代入して式中の u_t について整理すると、それぞれの沈降領域における終末速度(terminal velocity)が導かれる。

沈降領域が Stokes 域の場合は、次式のように導かれる。

$$0 = \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p g - \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho g - \frac{24}{Re_p} \frac{\pi D_p^2}{4} \frac{\rho u_t^2}{2} \quad \cdots(3.1.2.1)$$

$$0 = \frac{\pi g(\rho_p - \rho) D_p^3}{6} - \frac{24}{D_p u_t \rho / \mu} \frac{\pi D_p^2}{4} \frac{\rho u_t^2}{2} \quad \cdots(3.1.2.2)$$

$$0 = \frac{\pi g(\rho_p - \rho) D_p^3}{6} - 3\pi \mu D_p u_t \quad \cdots(3.1.2.3)$$

$$\boxed{u_t = \frac{g(\rho_p - \rho) D_p^2}{18\mu}} \quad (\text{Stokes}) \quad \cdots(3.1.2.4)$$

沈降領域が Allen 域の場合は、次式のように導かれる。

$$0 = \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p g - \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho g - \frac{10}{\sqrt{Re_p}} \frac{\pi D_p^2}{4} \frac{\rho u_t^2}{2} \quad \cdots(3.1.2.5)$$

$$\frac{\pi g(\rho_p - \rho) D_p^3}{6} \sqrt{Re_p} = 10 \frac{\pi D_p^2}{4} \frac{\rho u_t^2}{2} \quad \cdots(3.1.2.6)$$

$$\left[\frac{\pi g(\rho_p - \rho) D_p^3}{6} \sqrt{Re_p} \right]^2 = \left(10 \frac{\pi D_p^2}{4} \frac{\rho u_t^2}{2} \right)^2 \quad \cdots(3.1.2.7)$$

$$\frac{\pi^2 g^2 (\rho_p - \rho)^2 D_p^6}{36} \left(\frac{D_p u_t \rho}{\mu} \right) = 100 \frac{\pi^2 D_p^4}{16} \frac{\rho^2 u_t^4}{4} \quad \cdots(3.1.2.8)$$

$$\frac{g^2 (\rho_p - \rho)^2 D_p^3}{3600 \mu} = \frac{\rho u_t^3}{64} \quad \cdots(3.1.2.9)$$

$$\frac{4}{225} \frac{g^2 (\rho_p - \rho)^2 D_p^3}{\rho \mu} = u_t^3 \quad \cdots(3.1.2.10)$$

$$u_t = \left[\frac{4}{225} \frac{g^2 (\rho_p - \rho)^2}{\rho \mu} \right]^{1/3} D_p \quad (\text{Allen}) \quad \cdots(3.1.2.11)$$

沈降領域が Newton 域の場合は、次式のように導かれる。

$$0 = \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p g - \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho g - 0.44 \frac{\pi D_p^2}{4} \frac{\rho u_t^2}{2} \quad \cdots(3.1.2.12)$$

$$\frac{\pi g(\rho_p - \rho) D_p^3}{6} = \frac{0.44}{8} (\pi D_p^2) (\rho u_t^2) \quad \cdots(3.1.2.13)$$

$$\frac{g(\rho_p - \rho) D_p}{0.33} = \rho u_t^2 \quad \cdots(3.1.2.14)$$

$$u_t^2 = \frac{g(\rho_p - \rho) D_p}{(1/3)\rho} \quad \cdots(3.1.2.15)$$

$$u_t = \sqrt{\frac{3g(\rho_p - \rho) D_p}{\rho}} \quad (\text{Newton}) \quad \cdots(3.1.2.16)$$

【計算例】終末速度

- (1) 密度 2650 kg/m³、粒子径 70.0 μm の球粒子が密度 1000 kg/m³、粘度 1.00 mPa・s の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。重力加速度 9.81 m/s² とする。 (4.41×10^{-3} m/s)

$$u_t = g(\rho_p - \rho) D_p^2 / 18\mu = (9.81)(2650 - 1000)(70.0 \times 10^{-6})^2 / [(18)(1.00 \times 10^{-3})] = 4.4063 \times 10^{-3} \text{ m/s} \doteq \boxed{4.41 \times 10^{-3} \text{ m/s}}$$

(Stokes 域を仮定)

$$Re_p = D_p u_t \rho / \mu = (70.0 \times 10^{-6})(4.4063 \times 10^{-3})(1000) / (1.00 \times 10^{-3}) = 0.30844 < 2 \quad \text{Stokes 域の仮定は、正しい。}$$

- (2) 密度 2650 kg/m^3 、粒子径 $210 \text{ }\mu\text{m}$ の球粒子が密度 1.20 kg/m^3 、粘度 $18.2 \text{ }\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ の静止した空気中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(1.72 m/s)

$$u_t = g(\rho_p - \rho)D_p^2 / 18\mu = (9.81)(2650 - 1.20)(210 \times 10^{-6})^2 / [(18)(18.2 \times 10^{-6})] = 3.4979 \text{ m/s (Stokes 域を仮定)}$$

$$Re_p = D_p u_p \rho / \mu = (210 \times 10^{-6})(3.4979)(1.20) / (18.2 \times 10^{-6}) = 48.432 > 2 \quad \text{Stokes 域の仮定は、誤り。}$$

$$u_t = [(4/225)g^2(\rho_p - \rho)^2 / (\rho\mu)]^{1/3} D_p = [(4/225)(9.81)^2(2650 - 1.20)^2 / \{(1.20)(18.2 \times 10^{-6})\}]^{1/3} (210 \times 10^{-6}) = 1.7201 \text{ m/s} \approx \boxed{1.72 \text{ m/s}} \text{ (Allen 域を仮定)}$$

$$Re_p = D_p u_p \rho / \mu = (210 \times 10^{-6})(1.7201)(1.20) / (18.2 \times 10^{-6}) = 23.816 < 500 \quad \text{Allen 域の仮定は、正しい。}$$

【問題】終末速度

- (1) 密度 2650 kg/m^3 、粒子径 $10.0 \text{ }\mu\text{m}$ の球粒子が密度 1000 kg/m^3 、粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(8.99×10⁻⁵ m/s)
- (2) 密度 2650 kg/m^3 、粒子径 $500 \text{ }\mu\text{m}$ の球粒子が密度 1000 kg/m^3 、粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(0.0835 m/s)

3.1.3 自由沈降距離

沈降粒子が等加速度運動する場合を考える。ここでは、Stokes 域を仮定する。運動方程式を変数分離により u について解くと、ある時間 t [s]における沈降速度 u が導かれる。

$$\frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p \frac{du}{dt} = \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p g - \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho g - \frac{24}{Re_p} \frac{\pi D_p^2}{4} \frac{\rho u^2}{2} \quad \cdots(3.1.3.1)$$

$$\frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p \frac{du}{dt} = \frac{\pi g(\rho_p - \rho) D_p^3}{6} - \frac{24}{D_p u \rho / \mu} \frac{\pi D_p^2}{4} \frac{\rho u^2}{2} \quad \cdots(3.1.3.2)$$

$$\frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p \frac{du}{dt} = \frac{\pi g(\rho_p - \rho) D_p^3}{6} - 3\pi\mu D_p u \quad \cdots(3.1.3.3)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{6}{\pi D_p^3 \rho_p} \left[\frac{\pi g(\rho_p - \rho) D_p^3}{6} - 3\pi\mu D_p u \right] \quad \cdots(3.1.3.4)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{g(\rho_p - \rho)}{\rho_p} - \frac{18\mu u}{D_p^2 \rho_p} \quad \cdots(3.1.3.5)$$

$$\frac{du}{dt} = A - Bu \quad \left[A \equiv \frac{g(\rho_p - \rho)}{\rho_p} \quad B \equiv \frac{18\mu}{D_p^2 \rho_p} \right] \quad \cdots(3.1.3.6)$$

$$\int_0^u \frac{du}{A - Bu} = \int_0^t dt \quad \cdots(3.1.3.7)$$

$$-\frac{1}{B} [\ln(A - Bu)]_0^u = t \quad \cdots(3.1.3.8)$$

$$-\frac{1}{B}[\ln(A - Bu) - \ln A] = t \quad \cdots(3.1.3.9)$$

$$\ln \frac{A - Bu}{A} = -Bt \quad \cdots(3.1.3.10)$$

$$\frac{A - Bu}{A} = e^{-Bt} \quad \cdots(3.1.3.11)$$

$$u = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt}) \quad \cdots(3.1.3.12)$$

$$u = \frac{g(\rho_p - \rho)/\rho_p}{18\mu/(D_p^2 \rho_p)} \left[1 - \exp\left(-\frac{18\mu}{D_p^2 \rho_p} t\right) \right] \quad \cdots(3.1.3.13)$$

$$u = \frac{g(\rho_p - \rho)D_p^2}{18\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\rho_p D_p^2 / (18\mu)}\right) \right] \quad \cdots(3.1.3.14)$$

$$\boxed{u = \frac{g(\rho_p - \rho)D_p^2}{18\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]} \quad \left[\tau \equiv \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} \right] \quad \cdots(3.1.3.15)$$

ただし、 τ は緩和時間[s]。

上式の時間 t を無限大に漸近させると、沈降速度 u は Stokes 式の終末速度 u_t に等しくなる。また、上式の沈降速度 u は、沈降距離 h の時間微分(dh/dt)で表される。上式を積分することで、ある時間 t における沈降距離 h [m]を得る。

$$\frac{dh}{dt} = \frac{g(\rho_p - \rho)D_p^2}{18\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad \cdots(3.1.3.16)$$

$$\boxed{h = \frac{g(\rho_p - \rho)D_p^2}{18\mu} t + \frac{g(\rho_p - \rho)D_p^2}{18\mu} \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right] \tau} \quad \cdots(3.1.3.17)$$

【計算例】自由沈降距離

密度 2650 kg/m^3 、粒子径 $5.00 \text{ }\mu\text{m}$ の球粒子を密度 1.20 kg/m^3 、粘度 $18.2 \text{ }\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ の静止した空気中に自由沈降させる。①終末速度 u_t [m/s]、②終末速度の99%に到達するまでの時間 t_{99} [s]、③沈降距離 h [m]を求めよ。重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(① $1.98 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ 、② $9.31 \times 10^{-4} \text{ s}$ 、③ $1.45 \times 10^{-6} \text{ m}$)

$$\textcircled{1} u_t = g(\rho_p - \rho)D_p^2 / 18\mu = (9.81)(2650 - 1.20)(5.00 \times 10^{-6})^2 / [(18)(18.2 \times 10^{-6})] = 1.9829 \times 10^{-3} \text{ m/s} \doteq \boxed{1.98 \times 10^{-3} \text{ m/s}}$$

$$Re_p = D_p u_t \rho / \mu = (5.00 \times 10^{-6})(1.9829 \times 10^{-3})(1.20) / (18.2 \times 10^{-6}) = 6.5370 \times 10^{-6} < 2 \quad \text{Stokes 域}$$

$$\textcircled{2} \tau = \rho_p D_p^2 / (18\mu) = (2650)(5.00 \times 10^{-6})^2 / [(18)(18.2 \times 10^{-6})] = 2.0222 \times 10^{-4} \text{ s}$$

$$t_{99} = -\tau \ln 0.01 = -(2.0222 \times 10^{-4})(\ln 0.01) = 9.3125 \times 10^{-4} \text{ s} \doteq \boxed{9.31 \times 10^{-4} \text{ s}}$$

$$\textcircled{3} h = [g(\rho_p - \rho)D_p^2 / (18\mu)] t_{99} + [g(\rho_p - \rho)D_p^2 / (18\mu)] [\exp(-t_{99}/\tau) - 1] \tau = u_t (t_{99} - 0.99\tau)$$

$$= (1.9829 \times 10^{-3}) [(9.3125 \times 10^{-4}) - (0.99)(2.0222 \times 10^{-4})] = 1.4496 \times 10^{-6} \text{ m} \doteq \boxed{1.45 \times 10^{-6} \text{ m}}$$

【問題】自由沈降距離

密度 2650 kg/m^3 、粒子径 $5.00 \text{ }\mu\text{m}$ の球粒子を密度 1000 kg/m^3 、粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ の静水中に自由沈降させる。

①終末速度 u_t [m/s]、②終末速度の99%に到達するまでの時間 t_{99} [s]、③沈降距離 h [m]を求めよ。重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(① $2.25 \times 10^{-5} \text{ m/s}$, ② $1.69 \times 10^{-5} \text{ s}$, ③ $2.99 \times 10^{-10} \text{ m}$)

3.1.4 終末速度の補正

①**粒子形状の影響** 粒子形状が球以外の場合は、等体積球に置換した粒子の終末速度 u_{ts} [m/s]と球形度 Ψ [-]を用いて次式で表される。

$$u/u_{ts}=0.843\log_{10}(\Psi/0.065) \quad \cdots(3.1.4.1)$$

$$u_{ts}=g(\rho_p-\rho)D_v^2/18\mu \quad \cdots(3.1.4.2)$$

$$D_v=(6V_p/\pi)^{1/3} \quad \cdots(3.1.4.3)$$

ただし、 D_v は等体積球相当径[m]。

【計算例】終末速度の補正(粒子形状の影響)

密度 2650 kg/m^3 、一辺 $70.0 \text{ }\mu\text{m}$ の立方体粒子が密度 1000 kg/m^3 、粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。立方体の球形度 0.806 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。($6.25 \times 10^{-3} \text{ m/s}$)

$$V_p=D_p^3$$

$$D_v=(6V_p/\pi)^{1/3}=[(6/\pi)D_p^3]^{1/3}=(6/\pi)^{1/3}D_p=(6/\pi)^{1/3}(70.0 \times 10^{-6})=86.849 \text{ }\mu\text{m}$$

$$u_{ts}=g(\rho_p-\rho)D_v^2/18\mu=(9.81)(2650-1000)(86.849 \times 10^{-6})^2/[(18)(1.00 \times 10^{-3})]=6.7828 \times 10^{-3} \text{ m/s(Stokes 域を仮定)}$$

$$Re_p=D_v u_{ts} \rho / \mu = (86.849 \times 10^{-6})(6.7828 \times 10^{-3})(1000)/(1.00 \times 10^{-3}) = 0.58907 < 2 \quad \text{Stokes 域の仮定は、正しい。}$$

【問題】終末速度の補正(粒子形状の影響)

- (1) 密度 2650 kg/m^3 、直径 $70.0 \text{ }\mu\text{m}$ 、高さ $70.0 \text{ }\mu\text{m}$ の円柱粒子が密度 1000 kg/m^3 、粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。高さと同じ円柱の球形度 0.874 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。($5.49 \times 10^{-3} \text{ m/s}$)
- (2) 密度 2650 kg/m^3 、一辺 $20 \text{ }\mu\text{m}$ の立方体粒子が密度 1000 kg/m^3 、粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。立方体の球形度 0.806 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。($5.10 \times 10^{-4} \text{ m/s}$)
- (3) 密度 2650 kg/m^3 、直径 $20 \text{ }\mu\text{m}$ 、高さ $20 \text{ }\mu\text{m}$ の円柱粒子が密度 1000 kg/m^3 、粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。高さと同じ円柱の球形度 0.874 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。($4.48 \times 10^{-4} \text{ m/s}$)

②**粒子径の影響** 粒子径が $1 \text{ }\mu\text{m}$ 程度以下になるとスリップ効果の影響が大きくなり流体抵抗 R_f [N]が減少することから次式で補正する。

$$R_f = \frac{3\pi\mu D_p u}{C_C} \quad (\text{Stokes}) \quad \cdots(3.1.4.4)$$

$$C_C = 1 + Kn \left[2.46 + 0.82 \exp\left(-\frac{0.44}{Kn}\right) \right] \quad \cdots(3.1.4.5)$$

C_c はカニングガムの補正係数[-]であり、スリップ効果による流体抵抗の減少分を補正するための因子。上式は気体中を運動する粒子に対して成り立ち、液体の場合は $C_c=1$ である。【文献 2】

Kn は Knudsen(クヌーセン)数であり、拡散分子の平均自由行程 λ [m](固体壁に衝突した溶質が再び固体壁に衝突するまでに進む平均距離)と流れ場の代表長さ L [m](ここでは粒子径 D_p [m])の比で定義される。

$$Kn \equiv \frac{\lambda}{L} \quad \dots(3.1.4.6)$$

平均自由行程の簡便な推算式として、次式がある。【文献 3, 4】

$$\lambda = \frac{3.2\mu}{P} \sqrt{\frac{RT}{2\pi M_A}} \quad \dots(3.1.4.7)$$

ただし、 M_A は気体分子のモル質量[kg/mol]、 P は全圧[Pa]、 R は気体定数 8.314 J/(mol·K)、 μ は粘度[Pa·s]。
(1 気圧 20°C の空気の場合で $\lambda \approx 0.07 \mu\text{m} \approx 0.1 \mu\text{m}$)

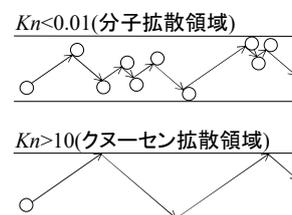
補正後の終末速度 u_t は、次式のように導かれる。

$$\frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p \frac{du}{dt} = \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p g - \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho g - \frac{C_D (\pi D_p^2 / 4) (\rho u^2 / 2)}{C_c} \quad \dots(3.1.4.8)$$

$$0 = \frac{\pi}{6} D_p^3 (\rho_p - \rho) g - \frac{24}{D_p u_t \rho / \mu} \frac{(\pi D_p^2 / 4) (\rho u_t^2 / 2)}{C_c} \quad \dots(3.1.4.9)$$

$$0 = \frac{\pi g (\rho_p - \rho) D_p^3}{6} - \frac{3\pi \mu D_p u_t}{C_c} \quad \dots(3.1.4.10)$$

$$u_t = \frac{g (\rho_p - \rho) D_p^2}{18\mu} C_c \quad \text{(Stokes)} \quad \dots(3.1.4.11)$$



【計算例】終末速度の補正(粒子径の影響)

100 kPa, 20°C の空気中を粒子密度 2650 kg/m³、粒子径 0.500 μm の球粒子が自由沈降するときの①カニングガム補正係数 C_c [-]と②終末速度 u_t [m/s]を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s、分子量 28.8、重力加速度 9.81 m/s² とする。(①1.34, ②2.65×10⁻⁵ m/s)

$$\lambda = 3.2(\mu/P)(RT/2\pi M_A)^{0.5} = (3.2)(18.2 \times 10^{-6} / 100 \times 10^3) [(8.314)(293.15) / \{(2\pi)(28.8/1000)\}]^{0.5} = 6.7590 \times 10^{-8} \text{ m}$$

$$Kn = \lambda/L = \lambda/D_p = (6.7590 \times 10^{-8}) / (0.500 \times 10^{-6}) = 0.13518$$

$$C_c = 1 + Kn[2.46 + 0.82 \exp(-0.44/Kn)] = 1 + (0.13518)[2.46 + 0.82 \exp(-0.44/0.13518)] = 1.3368 \approx 1.34$$

$$u_t = [g(\rho_p - \rho) D_p^2 / 18\mu] C_c = [(9.81)(2650 - 1.20)(0.500 \times 10^{-6})^2 / \{(18)(18.2 \times 10^{-6})\}] (1.3368) = 2.6508 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$\approx \boxed{2.65 \times 10^{-5} \text{ m/s}}$$

【問題】終末速度の補正(粒子径の影響)

100 kPa, 20°C の空気中を粒子密度 2650 kg/m³、粒子径 0.100 μm の球粒子が自由沈降するときの①カニングガム補正係数 C_c [-]と②終末速度 u_t [m/s]を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s、分子量 28.8、重力加速度 9.81 m/s² とする。(①2.95, ②2.34×10⁻⁶ m/s)

③容器壁の影響 懸濁液の入った容器を傾けると、粒子沈降により壁面近傍の粒子濃度が減少して液密度が小さくなる一方、液本体側の粒子密度が増加して液密度が大きくなる。その結果、器壁近傍と液本

体の中で密度分布が生成されて循環流が生じる。このため、垂直容器の場合よりも粒子の沈降が早く完了する(ボイコット効果)。

3. 2 干渉沈降

濃厚粒子群の沈降挙動は、周囲の粒子の影響を受ける。これを干渉沈降(hindered settling)という。自由沈降時の終末速度式を補正することで、干渉沈降時の終末速度式を導くことができる。ここでは、Stokes域を仮定する。

①沈降速度の補正 大量の粉体粒子が沈降することで液相中に大量の空隙が生じる為、空隙を埋める置換流の影響が無視できなくなる。このとき、観測される沈降速度は、相対的なものとなる。上昇置換流速の大きさを u [m/s] とするとき、粒子の相対沈降速度 u_t' [m/s] は、干渉沈降時の終末速度 u_{ct} [m/s] と上昇置換流速 u を用いて次式で表される。

$$u_t' = u_{ct} - (-u) = u_{ct} + u \quad \dots(3.2.1)$$

ここで、断面積 A_{sl} [m²] の円筒容器内を沈降する粒子群の全体積と、それによって置換される流体の体積は等しいことから、次式が成り立つ。

$$A_{sl}(1-\varepsilon)u_{ct} = A_{sl}\varepsilon u \quad \dots(3.2.2)$$

$$u = \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right) u_{ct} \quad \dots(3.2.3)$$

ただし、 ε は空隙率[-]。

u_t' の式に代入する。

$$u_t' = u_{ct} + \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right) u_{ct} \quad \dots(3.2.4)$$

$$\boxed{u_t' = \frac{u_{ct}}{\varepsilon}} \quad \dots(3.2.5)$$

空隙率 ε は、懸濁液体積 V_{sl} [m³] に対する空隙体積の比 $(V_{sl} - V_p)$ [m³] で定義される。

$$\varepsilon \equiv \frac{V_{sl} - V_p}{V_{sl}} \quad \dots(3.2.6)$$

$$\varepsilon = \frac{A_{sl}L - (W_p/\rho_p)}{A_{sl}L} \quad \dots(3.2.7)$$

$$\boxed{\varepsilon = 1 - \frac{W_p}{\rho_p A_{sl}L}} \quad \dots(3.2.8)$$

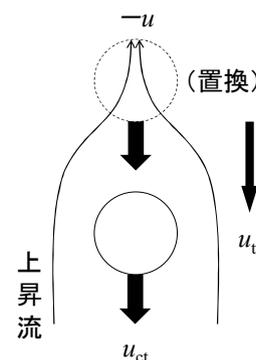
ただし、 A_{sl} は懸濁層の断面積[m²]、 L は懸濁層高[m]、 V_p は粒子体積[m³]、 W_p は粒子重量[kg]。

②流体物性の補正 懸濁液の粘度 μ_{sl} [Pa·s] は、懸濁粒子濃度に依存する。粒子濃度の代わりに空隙率 ε [-] の関数 $f(\varepsilon)$ を用いて、次式で表される。

$$\mu_{sl} = \mu f(\varepsilon) \quad \dots(3.2.9)$$

懸濁液の密度 ρ_{sl} [kg/m³] は、純粋な液体の密度 ρ よりも粒子群の重量分だけ大きくなることを考慮して、粒子群と置換流体の密度の和で表す。

$$\rho_{sl} = \rho_p(1-\varepsilon) + \rho_f\varepsilon \quad \dots(3.2.10)$$



③自由沈降速度式の補正 Stokes の終末沈降速度式に u_t' 、 μ_c 、 ρ_c の式を適用する。

$$u_t = \frac{g(\rho_p - \rho)D_p^2}{18\mu} \quad (\text{Stokes}) \quad \dots(3.2.11)$$

$$u_t' = \frac{g(\rho_p - \rho_{sl})D_p^2}{18\mu_{sl}} \quad \dots(3.2.12)$$

$$\frac{u_{ct}}{\varepsilon} = \frac{g[\rho_p - \{\rho_p(1-\varepsilon) + \rho\varepsilon\}]D_p^2}{18\mu f(\varepsilon)} \quad \dots(3.2.13)$$

$$\frac{u_{ct}}{\varepsilon} = \frac{g(\rho_p\varepsilon - \rho\varepsilon)D_p^2}{18\mu f(\varepsilon)} \quad \dots(3.2.14)$$

$$u_{ct} = \frac{g(\rho_p - \rho)D_p^2}{18\mu} \left[\frac{\varepsilon^2}{f(\varepsilon)} \right] \quad \dots(3.2.15)$$

$$\boxed{u_{ct} = \frac{u_t}{F(\varepsilon)}} \quad \left[F(\varepsilon) \equiv \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right] \quad \dots(3.2.16)$$

ただし、 $F(\varepsilon)$ は空間率関数(voidage function)であり、白井によって次式が報告されている。 [文献 5]

(a) $0.3 \leq \varepsilon \leq 0.7$ のとき $F(\varepsilon) = \frac{0.75 \times 10^{1.82(1-\varepsilon)}}{\varepsilon^2} \quad \dots(3.2.17)$

(b) $0.3 \leq \varepsilon \leq 0.75$ のとき $F(\varepsilon) = \frac{6(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \quad \dots(3.2.18)$

(c) $0.55 \leq \varepsilon \leq 1$ のとき $F(\varepsilon) = \varepsilon^{-4.65} \quad \dots(3.2.19)$

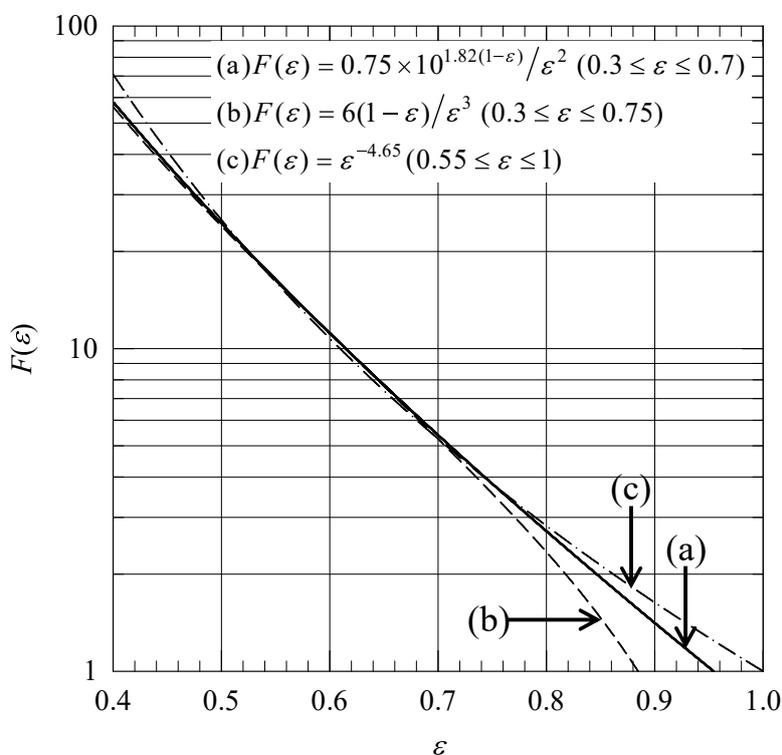


図 3.2.1 空間率関数と空隙率の関係 [文献 5]

【計算例】干渉沈降速度

密度 2650 kg/m^3 、平均粒子径 $25.0 \text{ }\mu\text{m}$ の粒子が $20.0 \text{ wt}\%$ 含まれる泥水中での粒子の干渉沈降速度 $u_{ct} [\text{m/s}]$ を求めよ。水の密度 1000 kg/m^3 、水の粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。 ($3.70 \times 10^{-4} \text{ m/s}$)

$$u_t = g(\rho_p - \rho) D_p^2 / 18\mu = (9.81)(2650 - 1000)(25.0 \times 10^{-6})^2 / [(18)(1.00 \times 10^{-3})] = 5.6203 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$Re_p = D_p u_t \rho / \mu = (25.0 \times 10^{-6})(5.6203 \times 10^{-4})(1000) / (1.00 \times 10^{-3}) = 0.014050 < 2 \quad \text{Stokes 域}$$

$$\varepsilon = (W/\rho) / [(W_p/\rho_p) + (W/\rho)] = [(0.80 W_{sl})/\rho] / [(0.20 W_{sl}/\rho_p) + (0.80 W_{sl}/\rho)] = (0.80/1000) / [(0.20/2650) + (0.80/1000)] = 0.91379$$

$$F(\varepsilon) = \varepsilon^{-4.65} = (0.91379)^{-4.65} = 1.5207$$

$$u_{ct} = u_t / F(\varepsilon) = 5.6203 \times 10^{-4} / 1.5207 = 3.6958 \times 10^{-4} \text{ m/s} \doteq \boxed{3.70 \times 10^{-4} \text{ m/s}}$$

【問題】干渉沈降速度

密度 2650 kg/m^3 、平均粒子径 $10.0 \text{ }\mu\text{m}$ の粒子が $12.0 \text{ wt}\%$ 含まれる泥水中での粒子の干渉沈降速度 $u_{ct} [\text{m/s}]$ を求めよ。水の密度 1000 kg/m^3 、水の粘度 $1.00 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。 ($7.12 \times 10^{-5} \text{ m/s}$)

参考文献

- [1] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), p.293(抵抗係数とレイノルズ数の対応表が掲載されている。)
- [2] 坂下 攝; 粉体プラントのスケール・アップ手法, 工業調査会(1992)
- [3] 坂下 攝; 粉体プロセス設計—演習ノート—月刊「化学装置」別冊, 工業調査会(1999)
- [4] 化学工学協会(編); 化学工学便覧 新版, 丸善 (1957)
- [5] 白井 隆; 流動層(化学工学シリーズ 4), 科学技術社(1958), p.115

4. 粉体層内の流れ

固定された粉体層内を流体が流れる現象を**透過**という。工業利用例としては、下水処理プロセスに用いられる砂ろ過、触媒粒子を充填層とした気固反応装置などがある。粉体層内に流体を流すと、圧力損失が生じることから、ポンプやコンプレッサーなどの流体輸送機を用いる場合は、損失分を動力で補う必要がある。圧力損失、すなわち流体のエネルギー損失より所要動力を求めて流体輸送機の仕様を検討するので、そうしたときに圧力損失の推算式が必要となる。粒子充填層内の流れを解析することは容易ではないが、工学的には、粒子間隙からなる流路をまっすぐな円管に置き換えることで、円管内流動の理論を適用することができる。

4. 1 相当直径

流路がまっすぐな円管でない場合は、**相当直径**に換算することで、直円管と同様の取り扱いができる。相当直径 D_{eq} [m]は、流体と接している壁面周辺の長さ、すなわちぬれ辺長 l_w [m]と流路断面積 A [m²]の比で表される**動水半径** r_H [m]の4倍で定義される。

$$D_{\text{eq}} = 4r_H \quad \cdots(4.1.1)$$

$$D_{\text{eq}} = \frac{4A}{l_w} \quad \cdots(4.1.2)$$

4倍の理由は、次式のように、円管における相当直径 D_{eq} を円管径 D と一致させるためである。

$$D_{\text{eq}} = \frac{4\pi(D/2)^2}{\pi D} \quad \cdots(4.1.3)$$

$$D_{\text{eq}} = D \quad \cdots(4.1.4)$$

流路形状が開溝と環状路の場合の相当直径 D_{eq} は、それぞれ次式で表される。

$$\text{(開溝)} \quad D_{\text{eq}} = \frac{4ab}{2a+b} \quad \cdots(4.1.5)$$

$$\text{(環状路)} \quad D_{\text{eq}} = \frac{4\pi[(D_2/2)^2 - (D_1/2)^2]}{\pi(D_2 + D_1)} = D_2 - D_1 \quad \cdots(4.1.6)$$

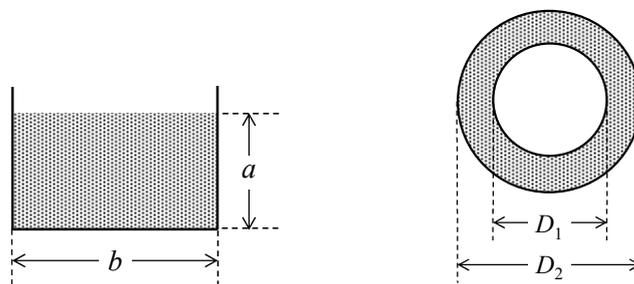


図 4.1.1 開溝(左)と環状路(右)

4. 2 透過速度

断面積 A [m²]の粒子充填層に一定の流量 Q [m³/s]で流体を流すと(空塔速度 u [m/s])、マノメーターの液

位に差が生じて、この分だけ圧力損失を生じる。圧力損失 ΔP [Pa]は、流体が粒子充填層内を流れる際の摩擦損失に相当し、空塔速度 u [m/s]、流体粘度 μ [Pa·s]、層高 L [m]に比例する。これらの関係式は、層流条件下での透過速度を表すダルシーの式で表される。【文献1】

$$u = k_p \frac{\Delta P}{\mu L} \left(= \frac{Q}{A} \right) \quad \cdots(4.2.1)$$

ただし、 k_p は透過係数[m²]。

ダルシーの式は簡便だが、粒子充填層やそれを構成している固体粒子に関する粒子特性項が含まれない為、粒子充填層を変更するたびに透過係数 k_p を実験的に求める必要がある。

いま、粒子充填層の上部から水を透過させる場合を考える。透過速度 u [m/s]は、ダルシーの式を用いて次式のように表される。(粒子充填層支持体の抵抗は無視する。)

$$u = \frac{1}{A} \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta P}{\mu R} \left[R \equiv \frac{L}{k_p} \right] \quad \cdots(4.2.2)$$

ただし、 A は透過面積[m²]、 L は充填層高[m]、 R は透過抵抗[1/m]、 V は透過液量[m³]、 t は透過時間[s]。圧力損失 ΔP [Pa]は透過圧力 P [Pa]に相当する。透過中、粒子充填層入口からの液面高さ L_0 [m]が一定に維持されるものとする、透過圧力 P [Pa]は給液面から充填層入口までの液圧 P_1 と充填層入口から出口までの液圧 P_2 の合計に等しい。

$$\Delta P (= P) = P_1 + P_2 = \rho g L_0 + \rho g L = \rho g (L_0 + L) \quad \cdots(4.2.3)$$

【計算例】透過流動

直径 10.0 cm の円筒容器に砂を厚さ 24.0 cm で充填して砂層の上から水を毎時 3.60 L 注ぐ。砂層入口からの液高は 10.0 cm に維持されるものとする。①透過圧力 P [kPa]、②透過速度 u [mm/s]、③透過抵抗 R [m⁻¹]、④透過係数 k_p [m²]を求めよ。水の密度 1000 kg/m³、粘度 1.00 mPa·s、重力加速度 9.81 m/s² とする。(① 3.33 kPa, ② 0.127 mm/s, ③ $2.62 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$, ④ $9.16 \times 10^{-12} \text{ m}^2$)

$$\textcircled{1} P = \rho g (L_0 + L) = (1000)(9.81)[(10.0/100) + (24.0/100)] = 3335.4 \text{ Pa} \doteq \boxed{3.33 \text{ kPa}}$$

$$\textcircled{2} A = \pi D^2 / 4 = \pi (10.0/100)^2 / 4 = \pi / 400$$

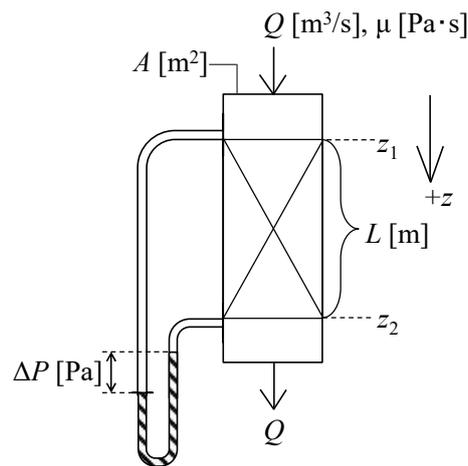
$$u = Q / A = [(3.60/1000) / 3600] / (\pi / 400) = 1.2732 \times 10^{-4} \text{ m/s} \doteq \boxed{0.127 \text{ mm/s}}$$

$$\textcircled{3} R = \Delta P / (\mu u) = 3335.4 / [(1.00 \times 10^{-3})(1.2732 \times 10^{-4})] = 2.6196 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} \doteq \boxed{2.62 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}}$$

$$\textcircled{4} k_p = L / R = (24/100) / (2.6196 \times 10^{10}) = 9.1617 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \doteq \boxed{9.16 \times 10^{-12} \text{ m}^2}$$

【問題】透過流動

直径 25.0 cm の円筒容器に砂を厚さ 60.0 cm で充填して砂層の上から水を毎時 90.0 L 注ぐ。砂層入口からの液高は 15.0 cm に維持されるものとする。①透過圧力 P [kPa]、②透過速度 u [mm/s]、③透過抵抗 R [m⁻¹]、④透過係数 k_p [m²]を求めよ。水の密度 1000 kg/m³、粘度 1.00 mPa·s、重力加速度 9.81 m/s² とする。(① 7.36 kPa, ② 0.509 mm/s, ③ $1.44 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$, ④ $4.15 \times 10^{-11} \text{ m}^2$)



4. 3 層流条件

粒子充填層内の流れは、みかけの直径 d_e [m]、みかけの長さ L_e [m]の仮想的な直円管内流れとみなすことができる。このとき、粒子充填層内を流れるみかけの平均流速 u_e [m/s]は、ハーゲン・ポアズイユの式を用いて次式で表される。[文献 2, 3]

$$u_e = \frac{d_e^2 \Delta P}{32 \mu L_e} \quad \cdots(4.3.1)$$

μ は流体粘度[Pa·s]、 ΔP は圧力損失[Pa]。

粒子充填層内における仮想的な屈曲流路において、空隙率 ε [-]は粒子充填層の全体積 V_b [m³]に対する空隙体積 V_{e0} [m³]の比で表される。

$$\varepsilon = \frac{V_{e0}}{V_b} \quad \cdots(4.3.2)$$

粒子充填層と空隙部の断面積をそれぞれ A および A_{e0} [m²]とすると、上式を用いて次式が成り立つ。

$$\varepsilon = \frac{A_{e0} L}{A L} = \frac{A_{e0}}{A} \quad \cdots(4.3.3)$$

ここで、空塔速度 u [m/s]および屈曲流路内のみかけの平均流速 u_{e0} [m/s]は、流体の体積流量 Q [m³/s]を用いてそれぞれ次式で表される。

$$u = \frac{Q}{A} \quad \cdots(4.3.4)$$

$$u_{e0} = \frac{Q}{A_{e0}} \quad \cdots(4.3.5)$$

u と u_{e0} の比をとって Q を消去したものを ε の式に代入し、 A と A_{e0} を消去すると、次式のようになる。

$$\frac{u}{u_{e0}} = \frac{A_{e0}}{A} \quad \cdots(4.3.6)$$

$$\varepsilon = \frac{u}{u_{e0}} \quad \cdots(4.3.7)$$

$$u_{e0} = \frac{u}{\varepsilon} \quad \cdots(4.3.8)$$

粒子充填層内における流体の透過時間は、あらゆる流路モデルにおいて等しい。いま、仮想的な屈曲流路と延伸流路の透過時間を等置し、みかけの平均流速 u_e [m/s]について整理すると、次式の通りとなる。

$$\frac{L}{u_{e0}} = \frac{L_e}{u_e} \quad \cdots(4.3.9)$$

$$u_e = u_{e0} \frac{L_e}{L} \quad \cdots(4.3.10)$$

u_{e0} の式を上式に代入すると、次式を得る。

$$u_e = \frac{u L_e}{\varepsilon L} \quad \cdots(4.3.11)$$

みかけの円管径 d_e [m]は、相当直径の式を次式の通りに変形して得る。

$$d_e = 4 \times \frac{AL}{l_w L} \quad \cdots(4.3.12)$$

$$d_e = 4 \times \frac{V}{A_w} \quad \cdots(4.3.13)$$

$$d_e = 4 \times \left[\frac{V_b \varepsilon}{S_V V_b (1-\varepsilon)} \right] \quad \cdots(4.3.14)$$

$$d_e = \frac{4\varepsilon}{S_V (1-\varepsilon)} \quad \cdots(4.3.15)$$

A は流路断面積[m²]、 A_w はぬれ面積[m²]、 L は層高[m]、 l_w はぬれ辺長[m]、 S_V は体積基準の比表面積[m²/m³]、 V_b は粒子充填層体積[m³]、 V は流路体積[m³]。

u_e の式と d_e の式をそれぞれハーゲン・ポアズイユの修正式に代入し、空塔速度 u [m/s]あるいは層高あたりの圧力損失 $\Delta P/L$ [Pa/m]について整理すると、粒子充填層内における層流条件下での圧力損失を表すコゼニー・カルマンの式が導かれる。[文献 4-6]

$$\frac{\mu L_e}{\varepsilon L} = \frac{1}{32} \left[\frac{4\varepsilon}{S_V (1-\varepsilon)} \right]^2 \frac{\Delta P}{\mu L_e} \quad \cdots(4.3.16)$$

$$u = \frac{\varepsilon}{32} \left(\frac{L}{L_e} \right) \left[\frac{16\varepsilon^2}{S_V^2 (1-\varepsilon)^2} \right] \frac{\Delta P}{\mu L_e} \quad \cdots(4.3.17)$$

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{L_e} \right) \left[\frac{\varepsilon^3}{S_V^2 (1-\varepsilon)^2} \right] \frac{\Delta P}{\mu L_e} \quad \cdots(4.3.18)$$

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{L_e} \right)^2 \left[\frac{\varepsilon^3}{S_V^2 (1-\varepsilon)^2} \right] \left(\frac{\Delta P}{\mu L_e} \right) \left(\frac{L_e}{L} \right) \quad \cdots(4.3.19)$$

$$u = \frac{1}{k} \left[\frac{\varepsilon^3}{S_V^2 (1-\varepsilon)^2} \right] \frac{\Delta P}{\mu L} \quad \left[1/k \equiv (1/2)(L/L_e)^2 \right] \quad \cdots(4.3.20)$$

$$u = \left[\frac{\varepsilon^3}{k S_V^2 (1-\varepsilon)^2} \right] \frac{\Delta P}{\mu L} \quad \cdots(4.3.21)$$

$$\boxed{\frac{\Delta P}{L} = k S_V^2 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \mu u} \quad \cdots(4.3.22)$$

k はコゼニー一定数[-]であり、経験的に $k \approx 5$ であることが知られている。[文献 4, 5]

ダルシーの式とコゼニー・カルマンの式を比較すると、粒子特性項を含む透過係数 k_p [m²]が得られる。このことから、コゼニー・カルマンの式がダルシーの式を修正した式になっていることが分かる。

$$k_p = \frac{\varepsilon^3}{5 S_V^2 (1-\varepsilon)^2} \quad \cdots(4.3.23)$$

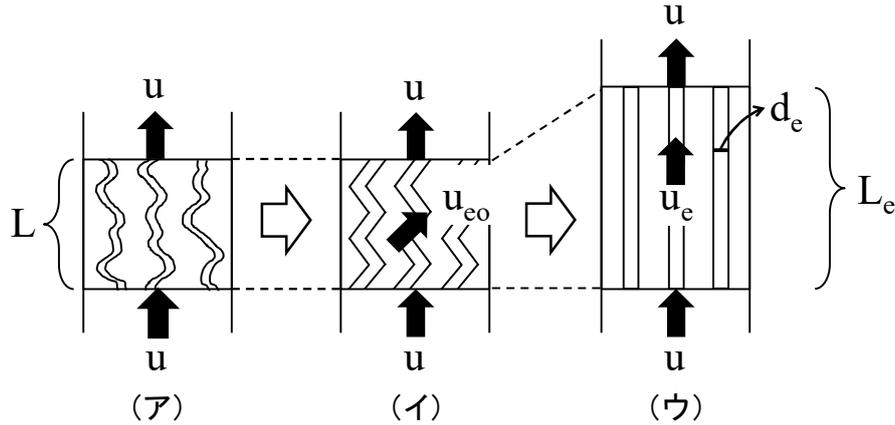


図 4.3.1 粒子充填層内の流動モデル(円管模型理論) [文献 4]
 (ア) 実際の流路、(イ) 仮想的な屈曲流路、(ウ) 仮想的な延伸流路

4. 4 乱流条件

粒子充填層内の流動状態が乱流の場合、直円管を仮定した粒子充填層内を流れるみかけの平均流速 u_e [m/s]は、ファニングの式を用いて次式で表される。

$$\Delta P = 4f \left(\frac{L_e}{d_e} \right) \left(\frac{\rho u_e^2}{2} \right) \quad \dots(4.4.1)$$

ただし、 f は管摩擦係数[-]。

u_e の式と d_e の式をそれぞれ上式に代入し、層高あたりの圧力損失 $\Delta P/L$ [Pa/m]について整理すると、粒子充填層内における乱流条件下での圧力損失を表すバーク・プラマーの式(Burke-Plummer's equation)が導かれる。 [文献 7]

$$\Delta P = 4f \frac{L_e}{\left[\frac{4\varepsilon}{S_v(1-\varepsilon)} \right]} \left(\frac{\rho_f}{2} \right) \left(\frac{u L_e}{\varepsilon L} \right)^2 \quad \dots(4.4.2)$$

$$\Delta P = 4f \left[\left(\frac{1-\varepsilon}{4\varepsilon} \right) S_v L_e \right] \left(\frac{\rho_f}{2} \right) \left(\frac{u^2 L_e^2}{\varepsilon^2 L^2} \right) \quad \dots(4.4.3)$$

$$\Delta P = \frac{1}{2} f S_v \left(\frac{L_e^3}{L^2} \right) \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \right) \rho_f u^2 \quad \dots(4.4.4)$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{2} f S_v \left(\frac{L_e^3}{L^3} \right) \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \right) \rho_f u^2 \quad \dots(4.4.5)$$

$$\frac{\Delta P}{L} = S_v \left[\frac{f}{2(L/L_e)^3} \right] \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \right) \rho_f u^2 \quad \dots(4.4.6)$$

$$\boxed{\frac{\Delta P}{L} = K S_v \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \right) \rho_f u^2} \quad \dots(4.4.7) \quad \text{ただし} \quad K \equiv \frac{f}{2(L/L_e)^3} \quad \dots(4.4.8)$$

4.5 一般式

層流項と乱流項を含めた層高あたりの圧力損失 $\Delta P/L$ [Pa/m]は、次式で表される。

$$\frac{\Delta P}{L} = au + b\rho u^2 \quad \cdots(4.5.1)$$

ただし、 a と b は定数。

上式の右辺第1項をコゼニー・カルマンの式と、右辺第2項をバーク・プラマーの式とそれぞれ比較すると、定数 a および b はそれぞれ次式で表される。

$$a \propto \frac{kS_V^2(1-\varepsilon)^2\mu}{\varepsilon^3} \quad \cdots(4.5.2)$$

$$a = k_1' \left[\frac{S_V^2(1-\varepsilon)^2\mu}{\varepsilon^3} \right] \quad \cdots(4.5.3)$$

$$b \propto KS_V \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \right) \quad \cdots(4.5.4)$$

$$b = k_2'S_V \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \right) \quad \cdots(4.5.5)$$

ただし、 k_1' と k_2' は定数。

粒子充填層内に充填されている粒子の体積基準比表面積 S_V [m²/m³]は、次式で与えられる。

$$S_V = \frac{S_p}{V_p} = \frac{\phi_s D_p^2}{\phi_v D_p^3} \quad \cdots(4.5.6)$$

ただし、 ϕ_s は表面積形状係数[－]、 ϕ_v は体積形状係数[－]。

充填粒子形状を球と仮定するとき、 $\phi_s = \pi$ および $\phi_v = \pi/6$ であることから、上式は次式で表される。

$$S_V = \frac{6}{D_p} \quad \cdots(4.5.7)$$

一般の粒子形状に対しては、カルマンの形状係数 ϕ_c (球のとき $\phi_c=1$)を用いて粒子径を補正する。

$$S_V = \frac{6}{\phi_c D_p} \quad \cdots(4.5.8)$$

a と b と S_V の式を最初の式に代入すると、エルガンの式(Ergun's equation)が導かれる。[文献 8]

$$\frac{\Delta P}{L} = \left[k_1' \frac{S_V^2(1-\varepsilon)^2\mu}{\varepsilon^3} \right] u + \left[k_2'S_V \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \right) \right] \rho_f u^2 \quad \cdots(4.5.9)$$

$$\frac{\Delta P}{L} = k_1' \left(\frac{6}{\phi_c D_p} \right)^2 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \mu u + k_2' \left(\frac{6}{\phi_c D_p} \right) \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \right) \rho_f u^2 \quad \cdots(4.5.10)$$

$$\frac{\Delta P}{L} = 36k_1' \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\mu u}{(\phi_c D_p)^2} + 6k_2' \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \right) \frac{\rho_f u^2}{\phi_c D_p} \quad \cdots(4.5.11)$$

$$\frac{\Delta P}{L} = k_1 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\mu u}{(\phi_c D_p)^2} + k_2 \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \right) \frac{\rho_f u^2}{\phi_c D_p} \quad [k_1=36k_1', k_2=6k_2'] \quad \cdots(4.5.12)$$

$$\frac{\Delta P}{L} = 150 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\mu u}{(\phi_c D_p)^2} + 1.75 \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \right) \frac{\rho_f u^2}{\phi_c D_p} \quad \cdots(4.5.13)$$

k_1 と k_2 はそれぞれ定数であり、 $k_1 \doteq 150$ 、 $k_2 \doteq 1.75$ であることが経験的に知られている。[文献8]
エルガンの式は、粒子充填層内の流動状態が層流と乱流の両方の場合において用いることができる。

【計算例】透過時圧力損失

断面積 12.0 cm^2 の円筒容器に粒子密度 2650 kg/cm^3 、粒子径 $150 \text{ }\mu\text{m}$ の砂 500 g を厚さ 50.0 cm で充填して砂層に空気を流速 20.0 cm/s で透過させる。圧力損失 ΔP [kPa] をエルガン式より求めよ。砂は球状、空気の密度 1.20 kg/m^3 、粘度 $18.2 \text{ }\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ とする。(4.00 kPa)

$$\varepsilon = 1 - (W_p / \rho_p A L) = 1 - [(500 \times 10^{-3}) / \{(2650)(12.0 \times 10^{-4})(50.0 \times 10^{-2})\}] = 0.68553$$

$$\Delta P / L = (150) [(1-\varepsilon)^2 / \varepsilon^3] [\mu u / (\phi_c D_p)^2] + (1.75) [(1-\varepsilon) / \varepsilon^3] [\rho_f u^2 / (\phi_c D_p)]$$

$$\Delta P / L = (150) [(1-0.68553)^2 / (0.68553)^3] [(18.2 \times 10^{-6})(20.0 \times 10^{-2}) / \{(1)(150 \times 10^{-6})\}^2]$$

$$+ (1.75) [(1-0.68553) / (0.68553)^3] [(1.20)(20.0 \times 10^{-2})^2 / \{(1)(150 \times 10^{-6})\}] = 7995.4 \text{ Pa}$$

$$\Delta P = (\Delta P / L) L = (7995.4)(50.0 \times 10^{-2}) = 3997.7 \text{ Pa} \doteq \boxed{4.00 \text{ kPa}}$$

【問題】透過時圧力損失

- (1) 断面積 12.0 cm^2 の円筒容器に粒子密度 2650 kg/cm^3 、粒子径 $100 \text{ }\mu\text{m}$ の砂 500 g を厚さ 50.0 cm で充填して砂層に空気を流速 20.0 cm/s で透過させる。圧力損失 ΔP [kPa] をエルガン式より求めよ。砂は球状、空気の密度 1.20 kg/m^3 、粘度 $18.2 \text{ }\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ とする。(8.79 kPa)
- (2) 断面積 12.0 cm^2 の円筒容器に粒子密度 2650 kg/cm^3 、粒子径 $150 \text{ }\mu\text{m}$ の砂 500 g を厚さ 50.0 cm で充填して砂層に空気を流速 40.0 cm/s で透過させる。圧力損失 ΔP [kPa] をエルガン式より求めよ。砂は球状、空気の密度 1.20 kg/m^3 、粘度 $18.2 \text{ }\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ とする。(8.54 kPa)

4. 6 流動層

固定層(fixed bed)の状態からガス流速をゆるやかに増大させてゆくと、それに合わせて充填層内の圧力損失が増大する。圧力損失と抵抗力が粒子群の自重に打ち勝つあたりで圧力損失がある極大値をとる。これは、はじめに充填された粒子群が圧密状態にあったためである。なお、再度同じ操作を行うと、極大値は現れない。その先は、粒子群が浮遊する流動化(fluidization)が起こり、均一流動層(particulate)や気泡流動層(bubbling)の状態となる。さらにガス流速を増大させると、スラッキング現象(脈動)やチャネリング現象(吹き抜け)が起こるようになり、圧力損失の低下も起こり始める。やがてガス流速が粒子の終末速度 u_t を越えると、粒子群全体がガスに持ち上げられて輸送される気流層(entrained bed)となり、圧力損失は大きく低下する。反対にガス流速を下げたゆくと、圧力損失は行きと同じ経路を通るが、極大値の経路は通らない。圧力損失と抵抗力が粒子群の自重と釣り合う点を境に圧力損失の低下が起こる。この

点におけるガス流速を流動化開始速度(minimum fluidization velocity) u_{mf} という。実験的には、ガス流速を下げる帰りの操作で決定する。

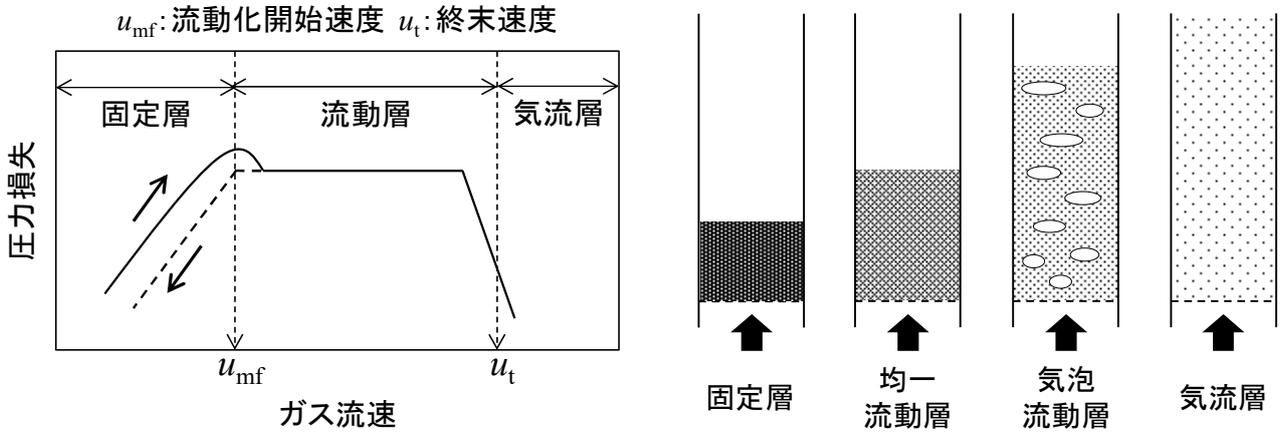


図 4.6.1 流動層内の圧力損失挙動 [文献 9, 10]

流動化開始時における粒子充填層の圧力損失 ΔP [Pa] は、粒子にかかる浮力 F_b [N] を差し引いた粒子充填層の自重 W [N] に等しい。粒子充填層にかかる力のつりあいは、次式のように導かれる。

$$\Delta P A = W - F_b \quad \dots(4.6.1)$$

$$\Delta P A = A Z_{mf} (1 - \varepsilon_{mf}) \rho_p g - A Z_{mf} (1 - \varepsilon_{mf}) \rho g \quad \dots(4.6.2)$$

$$\Delta P / Z_{mf} = (1 - \varepsilon_{mf}) (\rho_p - \rho) g \quad \dots(4.6.3)$$

左辺にエルガンの式を代入して流動化開始時の粒子レイノルズ数 Re_{mf} の 2 次方程式を解くと、流動化開始速度 u_{mf} [m/s] が導かれる。

$$150 \frac{(1 - \varepsilon_{mf})^2}{\varepsilon_{mf}^3} \frac{\mu u_{mf}}{(\phi_c D_p)^2} + 1.75 \frac{1 - \varepsilon_{mf}}{\varepsilon_{mf}^3} \frac{\rho u_{mf}^2}{\phi_c D_p} = (1 - \varepsilon_{mf}) (\rho_p - \rho) g \quad \dots(4.6.4)$$

$$\frac{1.75}{\varepsilon_{mf}^3 \phi_c} Re_{mf}^2 + \frac{150(1 - \varepsilon_{mf})}{\varepsilon_{mf}^3 \phi_c^2} Re_{mf} = Ar \quad \left[Re_{mf} = \frac{D_p u_{mf} \rho}{\mu}, Ar = \frac{\rho g (\rho_p - \rho) D_p^3}{\mu^2} \right] \quad \dots(4.6.5)$$

$$K_1 Re_{mf}^2 + K_2 Re_{mf} = Ar \quad \left[K_1 \equiv \frac{1.75}{\varepsilon_{mf}^3 \phi_c}, K_2 \equiv \frac{150(1 - \varepsilon_{mf})}{\varepsilon_{mf}^3 \phi_c^2} \right] \quad \dots(4.6.6)$$

$$Re_{mf} = \sqrt{(K_2/2K_1)^2 + (1/K_1) Ar} - (K_2/2K_1) \quad \dots(4.6.7)$$

$$u_{mf} = \frac{\mu}{\rho D_p} \left[\sqrt{(K_2/2K_1)^2 + (1/K_1) Ar} - (K_2/2K_1) \right] \quad \dots(4.6.8)$$

$$u_{mf} = \frac{\mu}{\rho D_p} \left[\sqrt{(33.7)^2 + 0.0408 Ar} - 33.7 \right] \quad (Re_{mf} = 0.001 \sim 4000) \quad \dots(4.6.9) \quad \text{[文献 11]}$$

ただし、 A は粒子充填層の断面積[m²]、 Ar はアルキメデス数(粘性力に対する粒子移動方向の慣性力の比)、 D_p は粒子径[m]、 g は重力加速度[m/s²]、 Z は塔高(充填層高)[m]、 ε は空隙率[-]、 ϕ_c はカルマンの形状係

数[-]、 ρ は流体密度[kg/m³]、 ρ_p は粒子密度[kg/m³]、 μ は流体粘度[Pa·s]、添え字 mf は流動化開始時の値。

【計算例】流動化開始速度

粒子径 160 μm 、粒子密度 2650 kg/m³ の砂を円筒容器内に充填して底部より空気を流す。流動化開始速度 u_{mf} [m/s] を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ 、重力加速度 9.81 m/s² とする。(0.0220 m/s)

$$Ar = \rho g (\rho_p - \rho) D_p^3 / \mu^2 = (1.20)(9.81)(2650 - 1.20)(160 \times 10^{-6})^3 / (18.2 \times 10^{-6})^2 = 385.58$$

$$u_{mf} = (\mu / \rho D_p) [\{ (33.7)^2 + 0.0408 Ar \}^{1/2} - 33.7]$$

$$= [(18.2 \times 10^{-6}) / \{ (1.20)(160 \times 10^{-6}) \}] [\{ (33.7)^2 + (0.0408)(385.58) \}^{1/2} - 33.7] = 0.022048 \text{ m/s} \doteq \boxed{0.0220 \text{ m/s}}$$

$$Re_{mf} = D_p u_{mf} \rho / \mu = (160 \times 10^{-6})(0.022048)(1.20) / (18.2 \times 10^{-6}) = 0.23259 < 4000 \text{ (許容範囲内)}$$

【問題】流動化開始速度

- (1) 粒子径 80.0 μm 、粒子密度 2650 kg/m³ の砂を円筒容器内に充填して底部より空気を流す。流動化開始速度 u_{mf} [m/s] を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ 、重力加速度 9.81 m/s² とする。(5.53 $\times 10^{-3}$ m/s)
- (2) 粒子径 160 μm 、粒子密度 5000 kg/m³ の砂を円筒容器内に充填して底部より空気を流す。流動化開始速度 u_{mf} [m/s] を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ 、重力加速度 9.81 m/s² とする。(0.0415 m/s)

参考文献

- [1] H. Darcy; *Les Fontains Publiques de la Ville de Dijon* (1856)
- [2] G. Hagen; *Pogg. Ann.*, **46**, 423-442 (1839)
- [3] J. Poiseuille; *Inst. De France Acad. Des Sci.*, **9** (1846) 433-544
- [4] J. Kozeny; *Sitzb. Akad. Wiss., Wien, Math.-naturw. Kl.* **136** (Abt. II a), 271-306 (1927)
- [5] J. Kozeny; *Z. Pfl.-Ernahr. Dung. Bodenk.*, **28A**, 54-56 (1933)
- [6] P.C. Carman; *Trans. Inst. Chem. Eng.*, **15**, 150-166(1937)
- [7] S.P. Burke and W.B. Plummer; *Ind. Eng. Chem.*, **20**, 1196-1200 (1928)
- [8] S. Ergun; *Chem. Eng. Prog.*, **48**, 89-94 (1952)
- [9] D. Kunii, O. Levenspiel; *Fluidization Engineering* 2nd Ed., Butterworth-Heinemann(1991), p.71(Fig. 4)
- [10] 国井大藏; 流動化法, 日刊工業新聞社(1962), p.105 (3.1 章, 図 3.2)
- [11] C.Y. Wen and Y.H. Yu; *AIChE J.*, **12** (1966) 610-612

5. 粉体層の力学的特性

5. 1 粉体層の摩擦特性

5.1.1 摩擦角

流体のようにサラサラと流れる粉体は扱いやすい。一般に、粒子径が大きく球状の粉体粒子は、流動性が良好である。いま、粉体ろうとから試料粉体を排出させて平板上に粉体を堆積させる(注入法)。このとき、平板と粉体斜面のなす角 ϕ_r を安息角といい、安息角が小さいほど粉体流動性が良好である。理論的な安息角 ϕ_r は、粉体斜面上にある粉体粒子1個(重量 W_p [N])に対する力のつり合いより導かれる。

$$(\text{斜面に対して垂直方向}) \quad W_p \cos \phi_r = N \quad \cdots(5.1.1.1)$$

$$(\text{斜面に対して水平方向}) \quad W_p \sin \phi_r = \mu N \quad \cdots(5.1.1.2)$$

$$W_p \cos \phi_r = \mu W_p \cos \phi \quad \cdots(5.1.1.3)$$

$$\phi_r = \tan^{-1} \mu \quad \cdots(5.1.1.4)$$

ただし、 N は垂直抗力[N]、 μ は摩擦係数[-]。

安息角は摩擦角の一種であり、上式は摩擦角の定義式にもなっている。ここでの摩擦角は、粉体がまさに動き出そうとする限界状態の角度をいう。摩擦係数は、粉体の動き出しにくさを表す。摩擦角は、安息角のほかにも粉体層内部の摩擦係数で定義される内部摩擦角 ϕ 、粉体一壁面間の摩擦係数で定義される壁摩擦角 ϕ_w などがある。

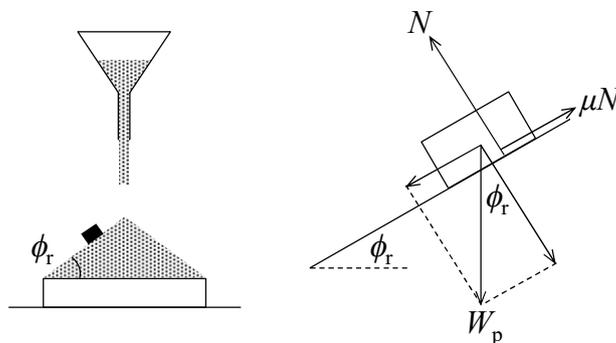


図 5.1.1.1 摩擦角(安息角)の定義

【計算例】摩擦係数

ある粉体試料の安息角は 27° であった。この粉体試料の摩擦係数 μ を求めよ。(0.510)

$$\mu = \tan \phi_r = \tan 27^\circ = 0.50952 \doteq \boxed{0.510}$$

【問題】摩擦係数

ある粉体試料の安息角は 32° であった。この粉体試料の摩擦係数 μ を求めよ。(0.625)

5.1.2 クーロン粉体

上箱と床面に固定した下箱からなる容器(断面積 A [m²])に試料粉体を入れて粉体層を形成し、上箱の蓋におもりをのせて粉体層に垂直荷重 P [N]を作用させる。ここに水平方向の力を上箱に加えて粉体層にせん断荷重 S [N]を作用させる(一面せん断試験)。このとき、粉体層は下箱底面から垂直反力 R_p [N]を、下箱側面から水平反力 R_s [N]をそれぞれ受けており、垂直荷重・せん断荷重とつり合っている。粉体層の内部では、これらの外力に抗うようにして垂直応力 σ [Pa]($=P/A$)とせん断応力 τ [Pa]($=S/A$)が作用する。このときのせん断応力をせん断抵抗という。せん断荷重を大きくしてゆき、やがて粉体層内部のせん断抵抗がある値を越えると、すべり面 XX' に沿って粉体層が動き出す。これを粉体層の崩壊という。応力限界時のせん断抵抗をせん断強さといい、粉体層の強度を表す。おもりを変更して同様の試験を行い、垂直荷重とせん断強さの関係を図上に整理して得られる近似曲線を破壊包絡線という。このとき、直線性を示す粉体をクーロン粉体といい、次のクーロンの式で表される。

$$\tau = \sigma \tan \phi + C = \mu_i \sigma + C \quad [\mu_i = \tan \phi] \quad \cdots(5.1.2.1)$$

ただし、 C は付着力[Pa]、 ϕ は内部摩擦角[deg.]、 σ は垂直応力[Pa]、 τ はせん断強さ[Pa]、 μ_i は内部摩擦係数[-]。 C , ϕ , μ_i は摩擦特性因子であり、粉体の種類や粉体層の性状に依存する。

下箱を取り去りすべり面 XX' を壁面と接触させて同様の整理を行うと、壁面に対する摩擦特性因子が得られる。

$$\tau = \sigma \tan \phi_w + C_w = \mu_w \sigma + C_w \quad [\mu_w = \tan \phi_w] \quad \cdots(5.1.2.2)$$

ただし、 C_w は壁面付着力[Pa]、 ϕ_w は壁摩擦角[deg.]、 μ_w は壁摩擦係数[-]。

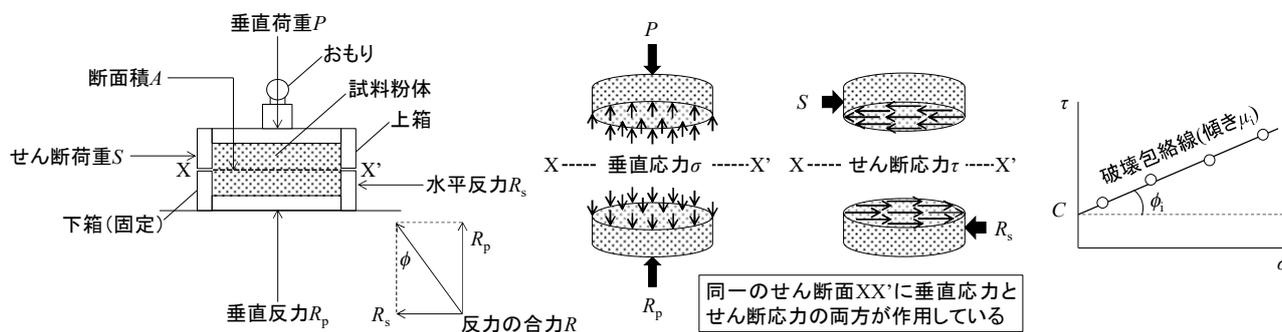


図 5.1.2.1 一面せん断試験による内部摩擦特性の解析 [文献 1]

【計算例】粉体層強度

ある粉体の一面せん断試験を行ったところ、せん断強さ τ [kPa]と鉛直応力 σ [kPa]の関係式 $\tau=0.535\sigma+10.5$ を得た。この粉体層の内部摩擦角 ϕ を求めよ。また、鉛直応力 $\sigma=120$ kPa、せん断応力 $\tau=50$ kPa がこの粉体層に作用しているとき、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。(28.1°)

$$\phi = \tan^{-1} \mu_i = \tan^{-1} 0.535 = 28.146^\circ \approx \boxed{28.1^\circ}$$

$$\tau = C + \sigma \tan \phi = 10.5 + 120 \tan 28.146^\circ = 74.697 \text{ kPa} > 50 \text{ kPa} \text{ (崩壊しない)}$$

【問題】粉体層強度

- (1) ある粉体の一面せん断試験を行ったところ、せん断強さ τ [kPa]と鉛直応力 σ [kPa]の関係式 $\tau=0.420\sigma+5.10$ を得た。この粉体層の内部摩擦角 ϕ を求めよ。また、鉛直応力 $\sigma=100$ kPa、せん断応力 $\tau=60$ kPa がこの粉体層に作用しているとき、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。(22.8°)
- (2) ある粉体の一面せん断試験を行ったところ、せん断強さ τ [kPa]と鉛直応力 σ [kPa]の関係式 $\tau=0.570\sigma+3.50$ を得た。この粉体層の内部摩擦角 ϕ を求めよ。また、鉛直応力 $\sigma=150$ kPa、せん断応力 $\tau=75$ kPa がこの粉体層に作用しているとき、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。(29.7°)

5. 2 粉体層内の応力状態

5.2.1 1方向から垂直応力が作用する場合

直方体を仮定した粉体層の垂直面(断面積 S_x [m²])に対して両側から垂直応力 σ_x [Pa]が作用しているとき、粉体層内部のすべり面 XX' (断面積 S [m²])の両側には反力として応力 σ' [Pa]が水平方向に作用しており、粉体層は動かない。このとき、垂直なすべり面に作用する応力 σ' [Pa]は、水平方向の力のつり合い ($\sigma' S = \sigma_x S_x$, $S = S_x$)より σ_x [Pa]に等しい。すべり面が垂直方向に対して角度 θ だけ傾斜している場合であっても、すべり面の両側には反力として応力 σ' [Pa]が水平方向に作用する。ただし、すべり面の断面積 S は、垂直時の S_x よりも $1/\cos\theta$ 倍だけ大きくなる ($S = S_x/\cos\theta$)。このため、傾斜したすべり面に作用する応力 σ' [Pa]は、水平方向の力のつり合い ($\sigma' S = \sigma_x S_x$, $S = S_x/\cos\theta$)より σ_x の $\cos\theta$ 倍だけ小さくなる ($\sigma' = \sigma_x \cos\theta$)。

傾斜したすべり面に作用する応力 σ' [Pa]は、すべり面に対して垂直な垂直応力 σ [Pa] ($=\sigma' \cos\theta = \sigma_x \cos^2\theta$) と水平なせん断応力 τ [Pa] ($=\sigma' \sin\theta = \sigma_x \cos\theta \sin\theta$)に分けて解析する。このとき、すべり面が垂直 ($\theta=0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$) または水平 ($\theta=90^\circ, 270^\circ$) のときにせん断応力 τ が 0 になる。このような垂直応力 σ を主応力といい、主応力が作用するすべり面を主応力面という。最大主応力 σ_1 [Pa] ($=\sigma_x$) を与える最大主応力面 ($\theta=0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$) と最小主応力 σ_3 [Pa] ($=0$) を与える最小主応力面 ($\theta=90^\circ, 270^\circ$) は、互いに直交する。せん断応力 τ の大きさは、最大主応力面に対して $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ 傾斜したすべり面に対して作用するとき最大となる ($\theta=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$)。このように、粉体層の内部で作用する各応力の大きさは、すべり面の角度によって変化する。なお、水中で作用する応力は、同じ水深であれば、すべり面の角度によらず一様である。上式の σ と τ の関係は、 σ - τ 座標平面上では円で表される。これをモールの応力円という。モール円を描くことで、垂直方向に対して角度 θ だけ傾斜したすべり面に作用する σ と τ を図上で読み取ることができる。ただし、 x - y 座標平面上で定義された傾斜角 θ は、 σ - τ 座標平面上では 2θ で表されることに留意する。

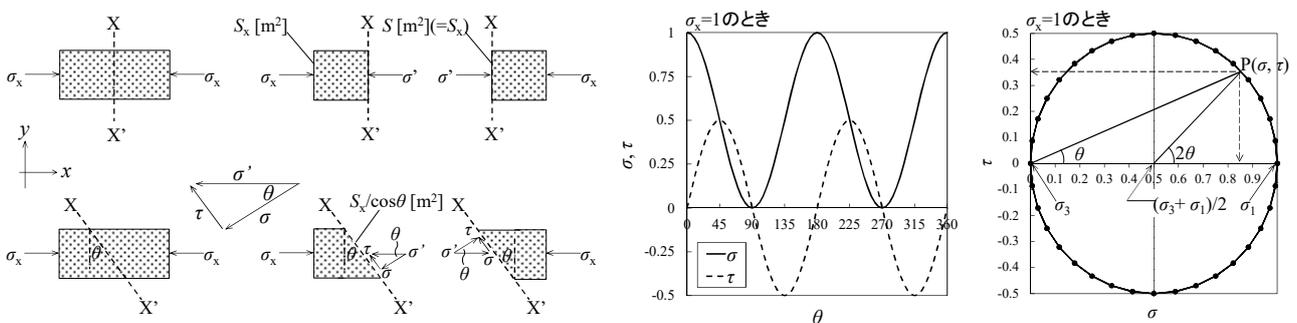


図 5.2.1.1 粉体層内の応力状態(1方向から垂直応力が作用する場合)

5.2.2 2方向から垂直応力が作用する場合

直方体を仮定した粉体層の垂直面に対して最大主応力 σ_1 [Pa]、水平面に対して最小主応力 σ_3 [Pa]が作用する場合を考える。最大主応力面から角度 θ だけ傾いた粉体層内のすべり面 XX' (断面積 S [m²]) に対して作用する垂直応力 σ [Pa]とせん断応力 τ [Pa]は、厚みのある微小な直角三角形 OXX' に対する x 方向と y 方向の力のつり合いより導かれる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_1 S \cos \theta = \sigma S \cos \theta + \tau S \sin \theta \quad \cdots(5.2.2.1)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_3 S \sin \theta = \sigma S \sin \theta - \tau S \cos \theta \quad \cdots(5.2.2.2)$$

x 方向のつり合い式の両辺に $\cos \theta$ を乗じる。また、 y 方向のつり合い式の両辺に $\sin \theta$ を乗じる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_1 \cos^2 \theta = \sigma \cos^2 \theta + \tau \sin \theta \cos \theta \quad \cdots(5.2.2.3)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_3 \sin^2 \theta = \sigma \sin^2 \theta - \tau \cos \theta \sin \theta \quad \cdots(5.2.2.4)$$

上の2式を加えると、すべり面に作用する垂直応力 σ [Pa]が導かれる。

$$\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta = \sigma (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad \cdots(5.2.2.5)$$

$$\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 (1 - \cos^2 \theta) = \sigma \quad [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \quad \cdots(5.2.2.6)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \theta + \sigma_3 = \sigma \quad \cdots(5.2.2.7)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(1 + \cos 2\theta)/2 + \sigma_3 = \sigma \quad [\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1] \quad \cdots(5.2.2.8)$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta} \quad \cdots(5.2.2.9)$$

x 方向のつり合い式の両辺に $\sin \theta$ を乗じる。 y 方向のつり合い式の両辺に $\cos \theta$ を乗じる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_1 \cos \theta \sin \theta = \sigma \cos \theta \sin \theta + \tau \sin^2 \theta \quad \cdots(5.2.2.10)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_3 \sin \theta \cos \theta = \sigma \sin \theta \cos \theta - \tau \cos^2 \theta \quad \cdots(5.2.2.11)$$

上の2式を差し引くと、すべり面に作用するせん断応力 τ [Pa]が導かれる。

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \cos \theta \sin \theta = \tau (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad \cdots(5.2.2.12)$$

$$\boxed{\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta} \quad [\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \quad \cdots(5.2.2.13)$$

σ の式を変形する。

$$\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \quad \cdots(5.2.2.14)$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \right)^2 \quad \cdots(5.2.2.15)$$

τ の式を変形する。

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \right)^2 \quad \cdots(5.2.2.16)$$

上の2式を辺々加えると、モールの応力円が導かれる。

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \right)^2 \quad \cdots(5.2.2.17)$$

$$\boxed{\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2} \quad [\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1] \quad \cdots(5.2.2.18)$$

上式は、中心 $((\sigma_1+\sigma_3)/2, 0)$ 、半径 $(\sigma_1-\sigma_3)/2$ の円を表す。最大主応力面から角度 θ だけ傾いたすべり面 XX' に作用するせん断応力 τ [Pa]を図上で読み取る。この値がクーロン式より求められるせん断強さ τ [Pa]よりも小さければ、すべり面での粉体層の崩壊は起こらない。

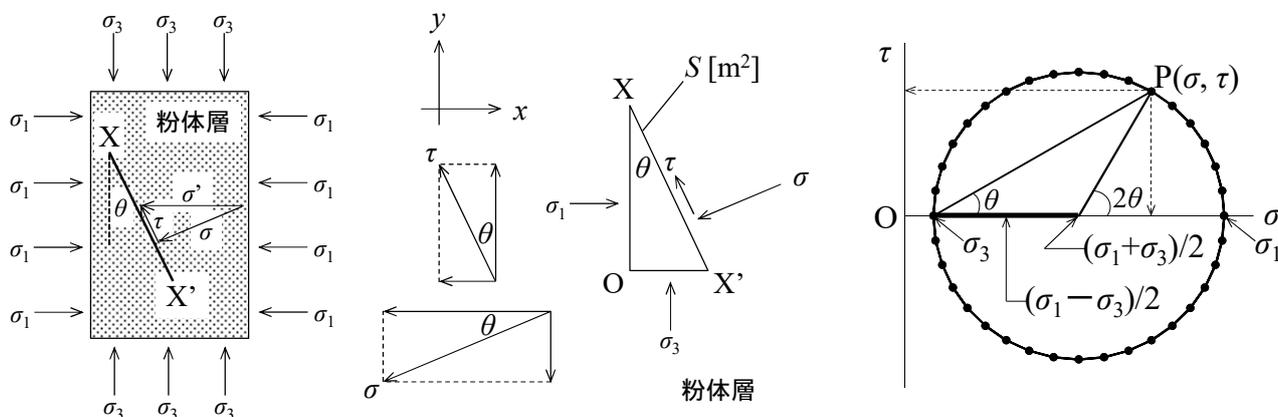


図 5.2.2.1 粉体層内の応力状態(2方向から垂直応力が作用する場合)

【計算例】粉体層内の応力状態

付着力 5.20 kPa、内部摩擦角 25°の粉体層に最大主応力 $\sigma_1=400$ kPa、最小主応力 $\sigma_3=100$ kPaが作用している。最大主応力面から角度 $\theta=30^\circ$ の面上に作用する①鉛直応力 σ [kPa]および②せん断応力 τ [kPa]を求めよ。また、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。ただし、粉体層の垂直面に対して最大主応力、水平面に対して最小主応力が作用するものとし、クーロン粉体を仮定する。(①325 kPa, ②130 kPa)

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 + (\sigma_1 - \sigma_3)(\cos 2\theta)/2 = (400 + 100)/2 + (400 - 100)(\cos 60^\circ)/2 = \boxed{325 \text{ kPa}}$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)(\sin 2\theta)/2 = (400 - 100)(\sin 60^\circ)/2 = 129.90 \text{ kPa} \doteq \boxed{130 \text{ kPa}}$$

$$\tau = C + \sigma \tan \phi = 5.20 + 325 \tan 25^\circ = 156.74 \text{ kPa} > 130 \text{ kPa} \text{ (崩壊しない)}$$

【問題】粉体層内の応力状態

- (1) 付着力 5.20 kPa、内部摩擦角 25°の粉体層に最大主応力 $\sigma_1=400$ kPa、最小主応力 $\sigma_3=100$ kPaが作用している。最大主応力面から角度 $\theta=45^\circ$ の面上に作用する①鉛直応力 σ [kPa]および②せん断応力 τ [kPa]を求めよ。また、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。ただし、粉体層の垂直面に対して最大主応力、水平面に対して最小主応力が作用するものとし、クーロン粉体を仮定する。(①250 kPa, ②150 kPa)
- (2) 付着力 5.20 kPa、内部摩擦角 25°の粉体層に最大主応力 $\sigma_1=400$ kPa、最小主応力 $\sigma_3=20$ kPaが作用している。最大主応力面から角度 $\theta=30^\circ$ の面上に作用する①鉛直応力 σ [kPa]および②せん断応力 τ [kPa]を求めよ。また、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。ただし、粉体層の垂直面に対して最大主応力、水平面に対して最小主応力が作用するものとし、クーロン粉体を仮定する。(①305 kPa, ②164 kPa)

5.2.3 2方向から垂直応力とせん断応力が作用する場合

直方体を仮定した粉体層の垂直面に対して垂直応力 σ_x [Pa]とせん断応力 τ_{yx} [Pa]、水平面に対して垂直応力 σ_y [Pa]とせん断応力 τ_{xy} [Pa]が作用する場合を考える。この場合、主応力の向きは垂直または水平ではなくなる。粉体層の垂直面から角度 θ だけ傾いた粉体層内のすべり面 XX' (断面積 S [m²])に対して作用する垂直応力 σ [Pa]とせん断応力 τ [Pa]は、厚みのある微小な直角三角形 OXX' に対する x 方向と y 方向の力のつり合いより導かれる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_x S \cos \theta + \tau_{yx} S \sin \theta = \sigma S \cos \theta + \tau S \sin \theta \quad \cdots(5.2.3.1)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_y S \sin \theta + \tau_{xy} S \cos \theta = \sigma S \sin \theta - \tau S \cos \theta \quad \cdots(5.2.3.2)$$

粉体層の回転が起こらない場合、せん断応力 τ_{yx} と τ_{xy} の大きさは互いに等しい($\tau_{yx}=\tau_{xy}$)。

x 方向のつり合い式の両辺に $\cos \theta$ を乗じる。また、 y 方向のつり合い式の両辺に $\sin \theta$ を乗じる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_x \cos^2 \theta + \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta = \sigma \cos^2 \theta + \tau \sin \theta \cos \theta \quad \cdots(5.2.3.3)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \cos \theta \sin \theta = \sigma \sin^2 \theta - \tau \cos \theta \sin \theta \quad \cdots(5.2.3.4)$$

上の2式を加えると、すべり面に作用する垂直応力 σ [Pa]が導かれる。

$$\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta = \sigma (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad \cdots(5.2.3.5)$$

$$\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y (1 - \cos^2 \theta) + \tau_{xy} \sin 2\theta = \sigma [\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \quad \cdots(5.2.3.6)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y) \cos^2 \theta + \sigma_y + \tau_{xy} \sin 2\theta = \sigma \quad \cdots(5.2.3.7)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)(1 + \cos 2\theta)/2 + \sigma_y + \tau_{xy} \sin 2\theta = \sigma [\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1] \quad \cdots(5.2.3.8)$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta} \quad \cdots(5.2.3.9)$$

x 方向のつり合い式の両辺に $\sin \theta$ を乗じる。 y 方向のつり合い式の両辺に $\cos \theta$ を乗じる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_x \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} \sin^2 \theta = \sigma \cos \theta \sin \theta + \tau \sin^2 \theta [\tau_{yx}=\tau_{xy}] \quad \cdots(5.2.3.10)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cos^2 \theta = \sigma \sin \theta \cos \theta - \tau \cos^2 \theta \quad \cdots(5.2.3.11)$$

上の2式を差し引くと、すべり面に作用するせん断応力 τ [Pa]が導かれる。

$$(\sigma_x - \sigma_y) \cos \theta \sin \theta + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \tau_{xy} = \tau (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad \cdots(5.2.3.12)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)(\sin 2\theta)/2 + (1 - 2\cos^2 \theta) \tau_{xy} = \tau [\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \quad \cdots(5.2.3.13)$$

$$\boxed{\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta} [\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1] \quad \cdots(5.2.3.14)$$

σ の式を変形する。

$$\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \cdots(5.2.3.15)$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \right)^2 \quad \cdots(5.2.3.16)$$

τ の式を変形する。

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \right)^2 \quad \cdots(5.2.3.17)$$

上の2式を辺々加えると、モールの応力円が導かれる。

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta\right)^2 \quad \cdots(5.2.3.18)$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\theta + (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta (\tau_{xy} \sin 2\theta) + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta \quad \cdots(5.2.3.19)$$

$$+ \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \sin^2 2\theta - (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta (\tau_{xy} \cos 2\theta) + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta \quad \cdots(5.2.3.20)$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) + \tau_{xy}^2 (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) \quad \cdots(5.2.3.21)$$

$$\boxed{\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \quad \cdots(5.2.3.22)$$

上式は、中心 $((\sigma_x + \sigma_y)/2, 0)$ 、半径 $[(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2]^{0.5}$ の円を表す。この円は、粉体層の垂直面から角度 θ だけ傾いたすべり面 XX' に作用するせん断応力 τ [Pa]を図上で与える。 $x-y$ 座標平面上における最大主応力と粉体層の水平面のなす角度 Ψ を求める。垂直応力 σ は角度 Ψ で極値をとり、最大または最小の主応力となる。

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\Psi + \tau_{xy} \sin 2\Psi \right) = 0 \quad \cdots(5.2.3.23)$$

$$-(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\Psi + 2\tau_{xy} \cos 2\Psi = 0 \quad \cdots(5.2.3.24)$$

$$\tan 2\Psi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \cdots(5.2.3.25)$$

$$\boxed{\Psi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \quad \cdots(5.2.3.26)$$

σ の式に代入して τ_{xy} を消去すると、最大主応力 σ_1 [Pa]と最小主応力 σ_3 [Pa]が導かれる。

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\Psi + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tan 2\Psi \sin 2\Psi \quad \cdots(5.2.3.27)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\Psi + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{\sin^2 2\Psi}{\cos 2\Psi} \quad \cdots(5.2.3.28)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{\cos^2 2\Psi + \sin^2 2\Psi}{\cos 2\Psi} \quad \cdots(5.2.3.29)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{1}{\cos 2\Psi} \quad [\sin^2 \Psi + \cos^2 \Psi = 1] \quad \cdots(5.2.3.30)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sqrt{1 + \tan^2 2\Psi} \quad [1 + \tan^2 \Psi = 1/\cos^2 \Psi] \quad \cdots(5.2.3.31)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sqrt{1 + 4\tau_{xy}^2 / (\sigma_x - \sigma_y)^2} \quad \left[\tan 2\Psi = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y) \right] \quad \cdots(5.2.3.32)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sqrt{1 + 4\tau_{xy}^2 / (\sigma_x - \sigma_y)^2} \quad \cdots(5.2.3.33)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sqrt{1 + 4\tau_{xy}^2 / (\sigma_x - \sigma_y)^2} \quad \cdots(5.2.3.34)$$

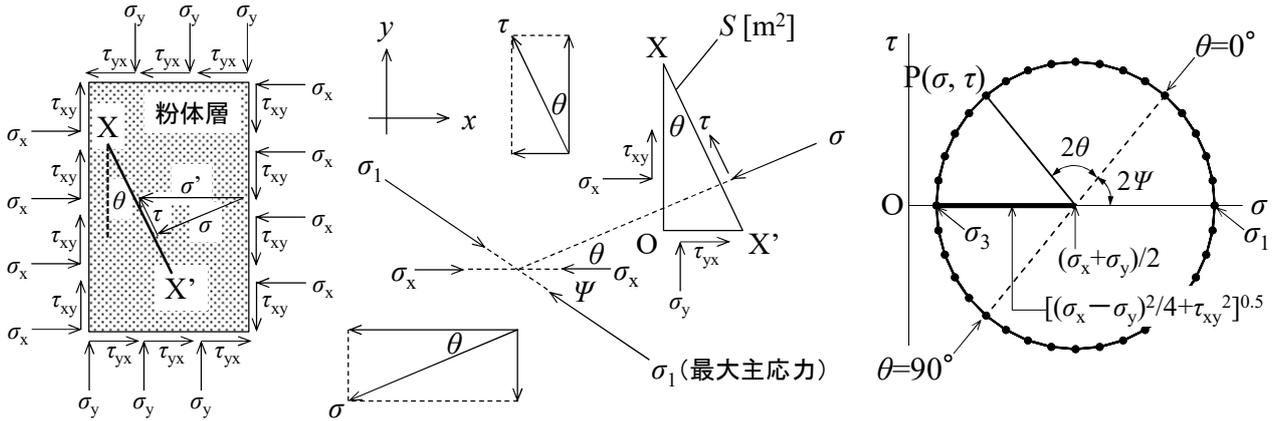


図 5.2.3.1 粉体層内の応力状態(2方向から垂直応力とせん断応力が作用する場合)

5.2.4 応力限界

粉体層の限界状態には、圧縮荷重が水平方向に作用して粉体層が斜め上方へ押し上げられようとする受動状態と、粉体層が水平方向に延伸されて自重のために崩壊しようとする主動状態の二つがある。前者の場合、最大主応力は水平方向、最小主応力は垂直方向となる。後者の場合、最大主応力は垂直方向、最小主応力は水平方向となる。以下、主動状態の粉体層に作用する主応力(粉体圧)の比と粉体層の摩擦角 ϕ の関係を導く。水平方向に作用する最小主応力 σ_3 を一定にして垂直方向に作用する最大主応力 σ_1 を増加させてゆくと(三軸圧縮試験)、図上ではモール円の半径が大きくなり、破壊包絡線と接したところで粉体層の崩壊が起こる。破壊包絡線を外挿したときの σ 軸との交点 $P(-\sigma_0, 0)$ と限界状態のモール円の中心 Q とそこから破壊包絡線に向かって降ろした垂線の足 R を結んでできる三角形 PQR を考える。クーロン粉体のモール円の半径を表す線分 QR の長さは、次式のように表される。

$$QR = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_0) - (\sigma_3 - \sigma_0)}{2} \quad \cdots(5.2.4.1)$$

線分 PQ の長さは、次式のように導かれる。

$$PQ = -\sigma_0 + \sigma_3 + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_0}{2} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_3 - \sigma_0)}{2} \quad \cdots(5.2.4.2)$$

線分 QR と線分 PQ の関係は、次式のように導かれる。

$$QR = PQ \sin \phi_1 \quad \cdots(5.2.4.3)$$

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_0) - (\sigma_3 - \sigma_0)}{2} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_3 - \sigma_0)}{2} \sin \phi_1 \quad \cdots(5.2.4.4)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_0) - (\sigma_3 - \sigma_0) = [(\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_3 - \sigma_0)] \sin \phi_1 \quad \cdots(5.2.4.5)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_0)(1 - \sin \phi_1) = (\sigma_3 - \sigma_0)(1 + \sin \phi_1) \quad \cdots(5.2.4.6)$$

$$\frac{\sigma_3 - \sigma_0}{\sigma_1 - \sigma_0} = \frac{1 - \sin \phi_1}{1 + \sin \phi_1} \quad \cdots(5.2.4.7)$$

非付着性粉体($C=0$)の場合は、次式となる。

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{1 - \sin \phi_1}{1 + \sin \phi_1} (\equiv K_a) \quad [\sigma_0 = 0] \quad \cdots(5.2.4.8)$$

$$K_a \left(\frac{P_h}{P_v} \right) = \frac{1 - \sin \phi_1}{1 + \sin \phi_1} \quad [\sigma_1 = P_v, \sigma_3 = P_h] \quad \cdots(5.2.4.9)$$

ただし、 P_h は水平方向の粉体圧[Pa]、 P_v は垂直方向の粉体圧[Pa]、 K_a はランキン係数[-]。

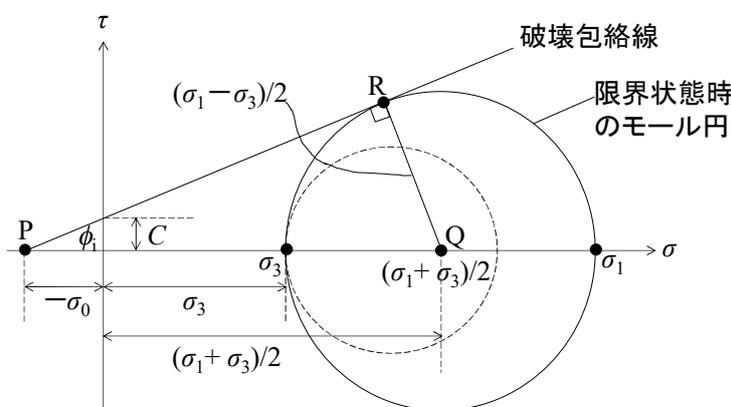


図 5.2.4.1 破壊包絡線とモール円の関係

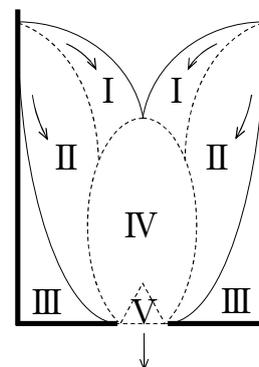
σ_3 を一定にして σ_1 を増大させてゆくと、モール円は破線から実線の方へと大きくなる。

破壊包絡線を接線とする円と σ 軸との交点 σ_1 に達すると、粉体層の崩壊が起こる。

5.3 重力流動

5.3.1 流出機構

平底容器の底面中心に設けた円形の排出口(オリフィス)からの粉体流出挙動を考える[文献2]。領域Ⅰの粉体層は、領域Ⅱの粉体層の上を速やかにすべり落ちる。領域Ⅱの粉体層は、領域Ⅲの粉体層の上をゆるやかにすべり落ちる。領域Ⅲの粉体層は、静止している。領域ⅠとⅡの粉体層は、領域Ⅳへ供給される。領域Ⅳの粉体層は、下向きに速やかに流れ落ちる。領域Ⅴの粉体層は、自由落下の状態であらゆる穴から流出する。排出口の近傍では定常的にアーチ構造が形成される。すなわち、アーチを構成する粒子は下に落ちて、代わりに新しい粒子が上から落ちて補充される。このような準静的アーチを動的アーチといい、架橋を形成して閉塞の元となる静的アーチとは区別される。この動的アーチ構造のために上部の粉体圧が支えられるため、排出口からの粉体流出速度は層高に依存しない。



5.3.2 アーチ形状説[文献3,4]

アーチ形状を半円の円弧と仮定すると、アーチ形状は円の方程式を用いて表される。

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{D_0}{2}\right)^2 \quad \cdots(5.3.2.1)$$

$$y = \sqrt{(D_0/2)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - (x/a)^2} \quad [a \equiv D_0/2] \quad \cdots(5.3.2.2)$$

排出口(直径 D_0 [m])内の $x=x \sim x+dx$ で切り取られる幅 dx の微小円環から排出される粉体の流出流量 dQ [m^3/s]は、次式で表される。

$$dQ = (2\pi x dx)u \quad \cdots(5.3.2.3)$$

粉体流速 u [m/s]は、ベルヌーイの定理を用いる。

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad \cdots(5.3.2.4)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(h_1 - h_2) + \frac{u_1^2}{2} = \frac{u_2^2}{2} \quad \cdots(5.3.2.5)$$

$$0 + gy + 0 = \frac{u^2}{2} \quad \cdots(5.3.2.6)$$

$$u = \sqrt{2gy} \quad \cdots(5.3.2.7)$$

dQ の式に代入して積分すると、排出口全体からの流出流量 Q [m^3/s]が導かれる。

$$dQ = 2\pi x dx \sqrt{2gy} \quad \cdots(5.3.2.8)$$

$$dQ = 2\pi x dx \sqrt{2ga\sqrt{1 - (x/a)^2}} \quad \cdots(5.3.2.9)$$

$$dQ = (2\pi\sqrt{2ga})x[1 - (x/a)^2]^{1/4} dx \quad \cdots(5.3.2.10)$$

$$Q = 2\pi\sqrt{2ga} \int_0^{D_0/2} x[1 - (x/a)^2]^{1/4} dx \quad \cdots(5.3.2.11)$$

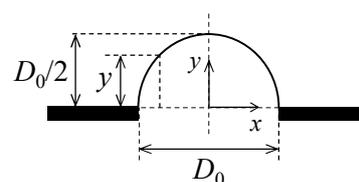
$$Q = 2\pi\sqrt{2ga} \int_0^a x[1 - (x/a)^2]^{1/4} dx \quad \cdots(5.3.2.12)$$

$$Q = 2\pi\sqrt{2ga} \int_0^1 at(1 - t^2)^{1/4} (dx/dt) dt \quad [t \equiv x/a] \quad \cdots(5.3.2.13)$$

$$Q = 2\pi\sqrt{2ga} \int_0^1 at(1 - t^2)^{1/4} a dt \quad \cdots(5.3.2.14)$$

$$Q = 2\pi\sqrt{2ga} a^{2.5} \int_0^1 t(1 - t^2)^{1/4} dt \quad \cdots(5.3.2.15)$$

$$Q = 2\pi\sqrt{2ga} a^{2.5} \int_1^0 (\sqrt{1 - X}) X^{1/4} (dt/dX) dX \quad \cdots(5.3.2.16)$$



$$Q = 2\pi\sqrt{2ga^{2.5}} \int_1^0 \sqrt{1-X} X^{1/4} \frac{dX}{-2\sqrt{1-X}} \quad [X \equiv 1-t^2] \quad \cdots(5.3.2.17)$$

$$Q = \pi\sqrt{2ga^{2.5}} \int_0^1 X^{1/4} dX \quad \cdots(5.3.2.18)$$

$$Q = \frac{4}{5}\pi\sqrt{2ga^{2.5}} \quad \cdots(5.3.2.19)$$

$$Q = \frac{4}{5}\pi\sqrt{2g} \left(\frac{D_0}{2}\right)^{2.5} \quad \cdots(5.3.2.20)$$

$$\boxed{Q \approx 1.97D_0^{2.5}} \quad \cdots(5.3.2.21)$$

粉体の場合は、上式のように層高には無関係であり、流出流量は排出口径の2.5乗に比例する。
液体の場合は、次式のように液高の0.5乗に比例し、流出流量は排出口径の2乗に比例する。

$$Q = uS = \sqrt{2gh} \pi (D_0/2)^2 \approx 3.48h^{0.5} D_0^2 \quad \cdots(5.3.2.22)$$

本法で導かれた式は単純だが、アーチ形状を半円の円弧と仮定している点や粉体の性質に関する情報が式中に含まれない点で問題が残る。

5.3.3 粉体エネルギー説 [文献5]

円形排出口(直径 D_0)の近傍には自由落下アーチが形成される(曲率半径 R_c)。このアーチより上方では原点に向かう流速 u_p の直線的な流れが角度 $0 \sim 2\beta$ の範囲で放射状に広がる(曲率半径 R)。自由落下アーチより下方では、排出口の両端で幅 $k/2$ ずつだけ狭められて縮流が形成され、自由落下の状態で鉛直下向きに流れる。

原点から $R\cos\theta$ の高さにある微小体積 dV の流動粉体のもつエネルギー $E dV$ [J]は、圧力項を無視して次式で表される。

$$E dV = \rho_B dV g R \cos\theta + \frac{1}{2} \rho_B dV u_p^2 \quad \cdots(5.3.3.1)$$

$$E = \rho_B g R \cos\theta + \frac{1}{2} \rho_B u_p^2 \quad \cdots(5.3.3.2)$$

粉体の流下速度 u_p [m/s]は断面積に反比例するので、適当な定数 λ を用いて等式化する。

$$u_p \propto \frac{1}{\pi(R\cos\theta)^2} = \frac{\lambda}{\pi R^2 \cos^2\theta} \quad \cdots(5.3.3.3)$$

流下中の粉体のもつエネルギーは原点に近づくにつれて減少し、自由落下アーチの位置で最小となる。このときの臨界曲率半径 R_c は、次式のように導かれる。

$$\frac{dE}{dR} = \frac{d}{dR} \left(\rho_B g R \cos\theta + \frac{1}{2} \rho_B u_p^2 \right) \quad \cdots(5.3.3.4)$$

$$\frac{dE}{dR} = \rho_B g \cos\theta + \frac{1}{2} \rho_B \frac{d}{dR} \left(\frac{\lambda}{\pi R^2 \cos^2\theta} \right)^2 \quad \cdots(5.3.3.5)$$

$$\frac{dE}{dR} = \rho_B g \cos \theta + \frac{1}{2} \rho_B \frac{d}{dR} \left(\frac{\lambda^2}{\pi^2 R^4 \cos^4 \theta} \right) \quad \cdots(5.3.3.6)$$

$$\frac{dE}{dR} = \rho_B g \cos \theta + \frac{\rho_B \lambda^2}{2\pi^2 \cos^4 \theta} \left(\frac{-4}{R^5} \right) \quad \cdots(5.3.3.7)$$

$$\frac{dE}{dR} = \rho_B g \cos \theta - \frac{2\rho_B \lambda^2}{\pi^2 R^5 \cos^4 \theta} \quad \cdots(5.3.3.8)$$

$$\rho_B g \cos \theta - \frac{2\rho_B \lambda^2}{\pi^2 R_c^5 \cos^4 \theta} = 0 \quad \cdots(5.3.3.9)$$

$$\pi^2 R_c^5 \cos^4 \theta = \frac{2\rho_B \lambda^2}{\rho_B g \cos \theta} \quad \cdots(5.3.3.10)$$

$$R_c = \left(\frac{2\lambda^2}{\pi^2 g \cos^5 \theta} \right)^{1/5} \quad \cdots(5.3.3.11)$$

最小曲率半径 R_c は、次式によっても導かれる。

$$2R_c \sin \beta = D_0 - 2(k/2) \quad \cdots(5.3.3.12)$$

$$R_c = \frac{D_0 - k}{2 \sin \beta} \quad \cdots(5.3.3.13)$$

R_c の式に代入して定数 λ を求める。

$$\left(\frac{2\lambda^2}{\pi^2 g \cos^5 \theta} \right)^{1/5} = \frac{D_0 - k}{2 \sin \beta} \quad \cdots(5.3.3.14)$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 g}{2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \beta} \frac{D_0 - k}{2} \right)^5 \quad \cdots(5.3.3.15)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 g}{(2^3)^2} \left[\frac{\cos \theta}{\sin \beta} (D_0 - k) \right]^{5/2}} \quad \cdots(5.3.3.16)$$

$$\lambda = \frac{\pi \sqrt{g}}{8} \left[\frac{\cos \theta}{\sin \beta} (D_0 - k) \right]^{5/2} \quad \cdots(5.3.3.17)$$

u_p の式に代入すると、流動粉体の最小流下速度 u_{pc} [m/s] が導かれる。

$$u_{pc} = \frac{\pi \sqrt{g}}{8} \left[\frac{\cos \theta}{\sin \beta} (D_0 - k) \right]^{5/2} \left/ \left[\pi \left(\frac{D_0 - k}{2 \sin \beta} \right)^2 \cos^2 \theta \right] \right. \quad \cdots(5.3.3.18)$$

$$u_{pc} = \left[\frac{\pi \sqrt{g}}{8} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right)^{5/2} (D_0 - k)^{5/2} \right] \left/ \left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right)^2 (D_0 - k)^2 \right] \right. \quad \cdots(5.3.3.19)$$

$$u_{pc} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right)^{1/2} (D_0 - k)^{1/2} \sqrt{g} \quad \cdots(5.3.3.20)$$

質量流出流量 W [kg/s] は、幅 $R_c d\theta$ および周長 $2\pi R_c \sin \theta$ からなる微小円環 (断面積 dS_c) から排出する粉体の流出流量 dQ [m³/s] を積分して導かれる。

$$W = \int \rho_B dQ \quad \cdots(5.3.3.21)$$

$$W = \int \rho_B u_{pc} dS_c \quad \cdots(5.3.3.22)$$

$$W = \int_0^\beta \rho_B u_{pc} (2\pi R_c \sin \theta) (R_c d\theta) \quad \cdots(5.3.3.23)$$

$$W = \int_0^\beta 2\pi \rho_B u_{pc} R_c^2 \sin \theta d\theta \quad \cdots(5.3.3.24)$$

$$W = \int_0^\beta 2\pi \rho_B \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right)^{1/2} (D_0 - k)^{1/2} \sqrt{g} \right] \left(\frac{D_0 - k}{2 \sin \beta} \right)^2 \sin \theta d\theta \quad \cdots(5.3.3.25)$$

$$W = \int_0^\beta \frac{\pi \rho_B}{4} \left[\frac{\cos^{1/2} \theta}{\sin^{5/2} \beta} \right] (D_0 - k)^{5/2} \sqrt{g} \sin \theta d\theta \quad \cdots(5.3.3.26)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left(\frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \int_0^\beta \cos^{1/2} \theta \sin \theta d\theta \quad \cdots(5.3.3.27)$$

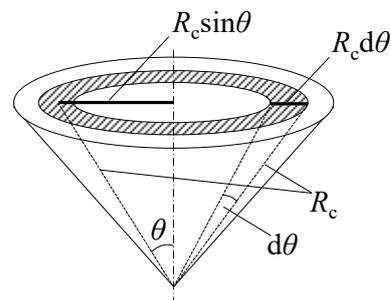
$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left(\frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \int_1^{\cos^{1/2} \beta} t \sqrt{1-t^4} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) dt \quad [t \equiv \cos^{1/2} \theta] \quad \cdots(5.3.3.28)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left(\frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \int_1^{\cos^{1/2} \beta} t \sqrt{1-t^4} \left(-\frac{2t}{\sqrt{1-t^4}} \right) dt \quad \cdots(5.3.3.29)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left(\frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \int_1^{\cos^{1/2} \beta} (-2t^2) dt \quad \cdots(5.3.3.30)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left(\frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \left[-\frac{2}{3} t^3 \right]_1^{\cos^{1/2} \beta} \quad \cdots(5.3.3.31)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{6} \left(\frac{1 - \cos^{3/2} \beta}{\sin^{5/2} \beta} \right) (D_0 - D_p)^{5/2} \quad [k \approx D_p] \quad \cdots(5.3.3.32)$$



排出口のアーチ形状に着目して導かれた式と同様、流出流量は排出口径 D_0 の 2.5 乗に比例する。流れの縮小幅 k は、粉体層の粒子径 D_p 程度であることが知られている【文献 6】。流出角 β [deg.] は、粉体特性や容器形状に依存する。円錐状のホッパーから排出される場合は、内部摩擦角 ϕ [deg.] に対する次の相関式を用いる【文献 7】。

$$\beta = 50^\circ - \frac{\phi}{2} \quad \cdots(5.3.3.33)$$

ホッパー角が分かっている場合は、ホッパーの半頂角 θ [deg.] を近似的に流出角と見なす($\beta \approx \theta$)【文献 8】。

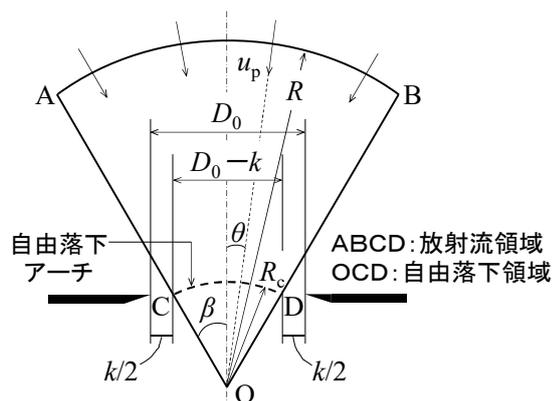


図 5.3.3.1 円形排出口(オリフィス)からの粉体流出モデル [文献 5]

【計算例】重力流動

- (1) 平均粒子径 100 μm 、かさ密度 800 kg/m^3 、内部摩擦角 27° の粉体を 5.00 cm の小孔から流出させるときの流出速度 W [kg/s]を求めよ。(0.747 kg/s)

$$\beta = 50^\circ - (\phi/2) = 50^\circ - (27^\circ/2) = 36.5^\circ$$

$$W = (\pi \rho_b g^{1/2}/6) [(1 - \cos^{3/2} \beta) / \sin^{5/2} \beta] (D_0 - D_p)^{5/2}$$

$$= [800\pi(9.81)^{1/2}/6] [(1 - \cos^{3/2} 36.5^\circ) / \sin^{5/2} 36.5^\circ] (5.00 \times 10^{-2} - 100 \times 10^{-6})^{5/2} = 0.74686 \text{ kg/s} \doteq \boxed{0.747 \text{ kg/s}}$$

- (2) 平均粒子径 500 μm 、かさ密度 800 kg/m^3 、内部摩擦角 27° の粉体を毎秒 1.00 kg 流出させるのに必要な流出口径 D_0 [cm]を求めよ。(5.66 cm)

$$\beta = 50^\circ - (\phi/2) = 50^\circ - (27^\circ/2) = 36.5^\circ$$

$$D_0 = D_p + [W / \{(\pi \rho_b g^{1/2}/6) \{ (1 - \cos^{3/2} \beta) / \sin^{5/2} \beta \} \}]^{2/5}$$

$$= 500 \times 10^{-6} + [1.00 / \{ \{ 800\pi(9.81)^{1/2}/6 \} \{ (1 - \cos^{3/2} 36.5^\circ) / \sin^{5/2} 36.5^\circ \} \}]^{2/5} = 0.056579 \text{ m} \doteq \boxed{5.66 \text{ cm}}$$

【問題】重力流動

- (1) 平均粒子径 10.0 μm 、かさ密度 800 kg/m^3 、内部摩擦角 27° の粉体を 5.00 cm の小孔から流出させるときの流出速度 W [kg/s]を求めよ。(0.750 kg/s)
- (2) 平均粒子径 5.00 μm 、かさ密度 800 kg/m^3 、内部摩擦角 27° の粉体を毎秒 1.00 kg 流出させるのに必要な流出口径 D_0 [cm]を求めよ。(5.61 cm)

5.3.4 偏析 [文献 9]

均一に混合された粉体であっても、それを流動させると、粒子径、粒子密度、粒子形状のちがいによって再び不均一となる。これを**偏析(segregation)**といい、粉体の分離現象に相当する。たとえば、均一に混合された粉体をホップの真上から投入して、粉体を円錐状に堆積させる。このとき、粒子径の大きい粗粉体は流れやすく、中心部から離れた外周部に分布しやすい(**粒度偏析**)。一方、微粉体は、粒子空隙を通して粉体層の下方へ移動する。粉体層に振動が加わると、移動がさらに促進される。このような部分的な偏析を**パーコレーション(percolation、すり抜け、浸透)**という。粉体試料を長い間放置しておく、はじめの頃は均一混合の状態であっても徐々に偏析が進み、場所によって粒子径分布の変化が生じることになる。そのほか、粉体供給時、微粉体は舞い上がりやすいため、沈降すると粉体層の表面に分布す

るようになる。また、粒子径が同じ程度であっても、粒子密度が大きいものは粉体層の下方へ、小さいものは上方へ移動する(密度偏析)。これらの課題は、粉体造粒物の粒子径を揃えることで抑制できる。

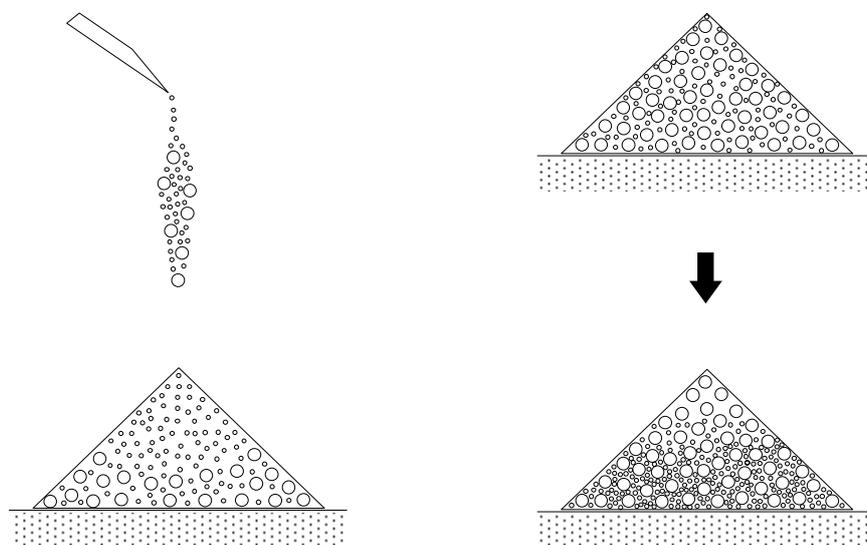


図 5.3.4.1 偏析現象の例

(左) 粗粉体は外周部に堆積しやすく、微粉体は堆積物の表面に堆積しやすい。

(右) 長時間静置しておくと、微粉体が粒子間隙をすり抜けて粉体層の下方へ移動する。

参考文献

- [1] A.W. Jenike, P.J. Elsey, R.H. Woolley; *Proc. ASTM*, **60** (1960) 1168-1181
- [2] R.L. Brown and J.C. Richards; *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, **37** (1959)108-116
- [3] Г.И. Покровский(ポクロフスキー); *Жур. Тех. Физ.*, **7** (1937)424-427
- [4] И.П. Линчевский(リンチェフスキー); *Жур. Тех. Физ.*, **9** (1939)343-347
- [5] R.L. Brown and J.C. Richards; *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, **37** (1959)108-116
- [6] 植松時雄(著), 化学工学協会(編); 化学機械技術, 第5集(1953) p.187
- [7] 藤田 重文, 東畑平一郎(編); 化学工学Ⅱ 第2版「機械的操作」, 東京化学同人(1972) p.129-131
- [8] 今木 清康; 粉体工学演習, コロナ社(1987)p.81
- [9] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), 8.4章

粉体貯蔵

1. 粉体層の力学的特性

1. 1 粉体層の摩擦特性

1.1.1 摩擦角

流体のようにサラサラと流れる粉体は扱いやすい。一般に、粒子径が大きく球状の粉体粒子は、流動性が良好である。いま、粉体ろうとから試料粉体を排出させて平板上に粉体を堆積させる(注入法)。このとき、平板と粉体斜面のなす角 ϕ を安息角といい、安息角が小さいほど粉体流動性が良好である。理論的な安息角 ϕ は、粉体斜面上にある粉体粒子1個(重量 W_p [N])に対する力のつり合いより導かれる。

$$(斜面に対して垂直方向) W_p \cos \phi = N \quad \cdots(1.1.1)$$

$$(斜面に対して水平方向) W_p \sin \phi = \mu N \quad \cdots(1.1.2)$$

$$W_p \cos \phi = \mu W_p \cos \phi \quad \cdots(1.1.3)$$

$$\phi = \tan^{-1} \mu \quad \cdots(1.1.4)$$

ただし、 N は垂直抗力[N]、 μ は摩擦係数[-]。

安息角は摩擦角の一種であり、上式は摩擦角の定義式にもなっている。ここでの摩擦角は、粉体がまさに動き出そうとする限界状態の角度をいう。摩擦係数は、粉体の動き出しにくさを表す。摩擦角は、安息角のほかにも粉体層内部の摩擦係数で定義される内部摩擦角 ϕ_i 、粉体一壁面間の摩擦係数で定義される壁摩擦角 ϕ_w などがある。

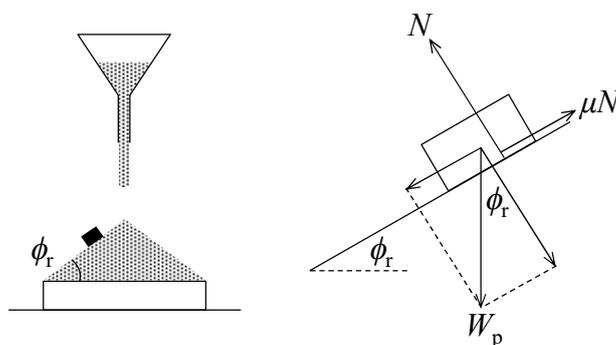


図 1.1.1.1 摩擦角(安息角)の定義

【計算例】摩擦係数

ある粉体試料の安息角は 27° であった。この粉体試料の摩擦係数 μ を求めよ。(0.510)

$$\mu = \tan \phi = \tan 27^\circ = 0.50952 \doteq \boxed{0.510}$$

【問題】摩擦係数

ある粉体試料の安息角は 32° であった。この粉体試料の摩擦係数 μ を求めよ。(0.625)

1.1.2 クーロン粉体

上箱と床面に固定した下箱からなる容器(断面積 A [m²])に試料粉体を入れて粉体層を形成し、上箱の蓋におもりをのせて粉体層に垂直荷重 P [N]を作用させる。ここに水平方向の力を上箱に加えて粉体層にせん断荷重 S [N]を作用させる(一面せん断試験)。このとき、粉体層は下箱底面から垂直反力 R_p [N]を、下箱側面から水平反力 R_s [N]をそれぞれ受けており、垂直荷重・せん断荷重とつり合っている。粉体層の内部では、これらの外力に抗うようにして垂直応力 σ [Pa]($=P/A$)とせん断応力 τ [Pa]($=S/A$)が作用する。このときのせん断応力をせん断抵抗という。せん断荷重を大きくしてゆき、やがて粉体層内部のせん断抵抗がある値を越えると、すべり面 XX' に沿って粉体層が動き出す。これを粉体層の崩壊という。応力限界時のせん断抵抗をせん断強さといい、粉体層の強度を表す。おもりを変更して同様の試験を行い、垂直荷重とせん断強さの関係を図上に整理して得られる近似曲線を破壊包絡線という。このとき、直線性を示す粉体をクーロン粉体といい、次のクーロンの式で表される。

$$\tau = \sigma \tan \phi + C = \mu_i \sigma + C \quad [\mu_i = \tan \phi] \quad \cdots(1.1.2.1)$$

ただし、 C は付着力[Pa]、 ϕ は内部摩擦角[deg.]、 σ は垂直応力[Pa]、 τ はせん断強さ[Pa]、 μ_i は内部摩擦係数[-]。 C , ϕ , μ_i は摩擦特性因子であり、粉体の種類や粉体層の性状に依存する。

下箱を取り去りすべり面 XX' を壁面と接触させて同様の整理を行うと、壁面に対する摩擦特性因子が得られる。

$$\tau = \sigma \tan \phi_w + C_w = \mu_w \sigma + C_w \quad [\mu_w = \tan \phi_w] \quad \cdots(1.1.2.2)$$

ただし、 C_w は壁面付着力[Pa]、 ϕ_w は壁摩擦角[deg.]、 μ_w は壁摩擦係数[-]。

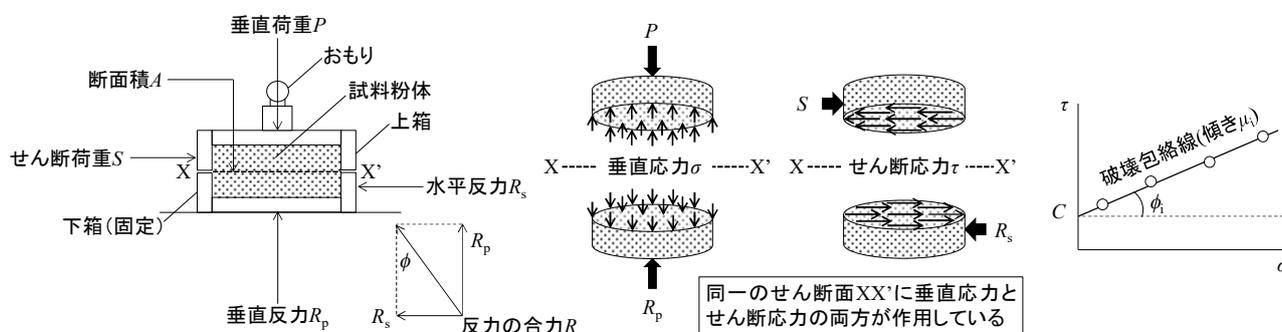


図 1.1.2.1 一面せん断試験による内部摩擦特性の解析 [文献 1]

【計算例】粉体層強度

ある粉体の一面せん断試験を行ったところ、せん断強さ τ [kPa]と鉛直応力 σ [kPa]の関係式 $\tau = 0.535\sigma + 10.5$ を得た。この粉体層の内部摩擦角 ϕ を求めよ。また、鉛直応力 $\sigma = 120$ kPa、せん断応力 $\tau = 50$ kPa がこの粉体層に作用しているとき、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。(28.1°)

$$\phi = \tan^{-1} \mu_i = \tan^{-1} 0.535 = 28.146^\circ \doteq 28.1^\circ$$

$$\tau = C + \sigma \tan \phi = 10.5 + 120 \tan 28.146^\circ = 74.697 \text{ kPa} > 50 \text{ kPa} \text{ (崩壊しない)}$$

【問題】 粉体層強度

- (1) ある粉体の一面せん断試験を行ったところ、せん断強さ τ [kPa]と鉛直応力 σ [kPa]の関係式 $\tau=0.420\sigma+5.10$ を得た。この粉体層の内部摩擦角 ϕ を求めよ。また、鉛直応力 $\sigma=100$ kPa、せん断応力 $\tau=60$ kPa がこの粉体層に作用しているとき、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。(22.8°)
- (2) ある粉体の一面せん断試験を行ったところ、せん断強さ τ [kPa]と鉛直応力 σ [kPa]の関係式 $\tau=0.570\sigma+3.50$ を得た。この粉体層の内部摩擦角 ϕ を求めよ。また、鉛直応力 $\sigma=150$ kPa、せん断応力 $\tau=75$ kPa がこの粉体層に作用しているとき、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。(29.7°)

1. 2 粉体層内の応力状態

1. 2. 1 1方向から垂直応力が作用する場合

直方体を仮定した粉体層の垂直面(断面積 S_x [m²])に対して両側から垂直応力 σ_x [Pa]が作用しているとき、粉体層内部のすべり面 XX' (断面積 S [m²])の両側には反力として応力 σ' [Pa]が水平方向に作用しており、粉体層は動かない。このとき、垂直なすべり面に作用する応力 σ' [Pa]は、水平方向の力のつり合い ($\sigma' S = \sigma_x S_x$, $S = S_x$)より σ_x [Pa]に等しい。すべり面が垂直方向に対して角度 θ だけ傾斜している場合であっても、すべり面の両側には反力として応力 σ' [Pa]が水平方向に作用する。ただし、すべり面の断面積 S は、垂直時の S_x よりも $1/\cos\theta$ 倍だけ大きくなる ($S = S_x / \cos\theta$)。このため、傾斜したすべり面に作用する応力 σ' [Pa]は、水平方向の力のつり合い ($\sigma' S = \sigma_x S_x$, $S = S_x / \cos\theta$)より σ_x の $\cos\theta$ 倍だけ小さくなる ($\sigma' = \sigma_x \cos\theta$)。

傾斜したすべり面に作用する応力 σ' [Pa]は、すべり面に対して垂直な垂直応力 σ [Pa] ($=\sigma' \cos\theta = \sigma_x \cos^2\theta$) と水平なせん断応力 τ [Pa] ($=\sigma' \sin\theta = \sigma_x \cos\theta \sin\theta$)に分けて解析する。このとき、すべり面が垂直 ($\theta=0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$) または水平 ($\theta=90^\circ, 270^\circ$) のときにせん断応力 τ が 0 になる。このような垂直応力 σ を主応力といい、主応力が作用するすべり面を主応力面という。最大主応力 σ_1 [Pa] ($=\sigma_x$) を与える最大主応力面 ($\theta=0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$) と最小主応力 σ_3 [Pa] ($=0$) を与える最小主応力面 ($\theta=90^\circ, 270^\circ$) は、互いに直交する。せん断応力 τ の大きさは、最大主応力面に対して $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ 傾斜したすべり面に対して作用するとき最大となる ($\theta=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$)。このように、粉体層の内部で作用する各応力の大きさは、すべり面の角度によって変化する。なお、水中で作用する応力は、同じ水深であれば、すべり面の角度によらず一様である。上式の σ と τ の関係は、 σ - τ 座標平面上では円で表される。これをモールの応力円という。モール円を描くことで、垂直方向に対して角度 θ だけ傾斜したすべり面に作用する σ と τ を図上で読み取ることができる。ただし、 x - y 座標平面上で定義された傾斜角 θ は、 σ - τ 座標平面上では 2θ で表されることに留意する。

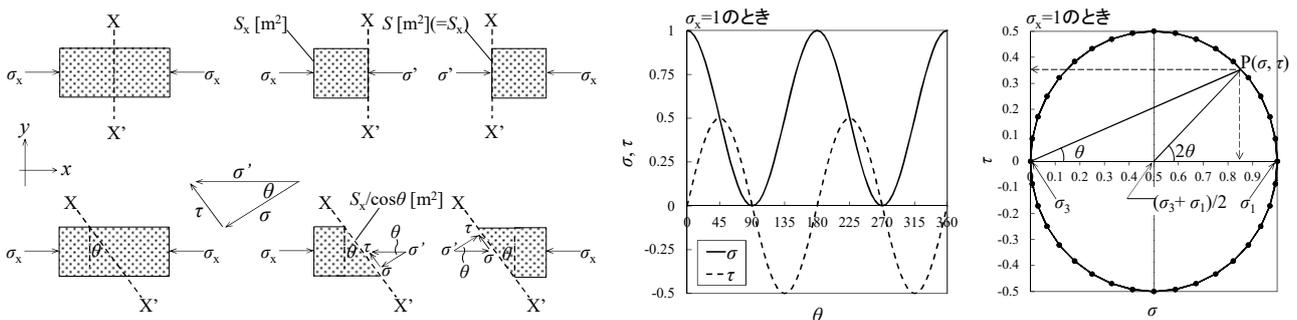


図 1.2.1.1 粉体層内の応力状態(1方向から垂直応力が作用する場合)

1.2.2 2方向から垂直応力が作用する場合

直方体を仮定した粉体層の垂直面に対して最大主応力 σ_1 [Pa]、水平面に対して最小主応力 σ_3 [Pa]が作用する場合を考える。最大主応力面から角度 θ だけ傾いた粉体層内のすべり面 XX' (断面積 S [m²])に対して作用する垂直応力 σ [Pa]とせん断応力 τ [Pa]は、厚みのある微小な直角三角形 OXX' に対する x 方向と y 方向の力のつり合いより導かれる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_1 S \cos \theta = \sigma S \cos \theta + \tau S \sin \theta \quad \cdots(1.2.2.1)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_3 S \sin \theta = \sigma S \sin \theta - \tau S \cos \theta \quad \cdots(1.2.2.2)$$

x 方向のつり合い式の両辺に $\cos \theta$ を乗じる。また、 y 方向のつり合い式の両辺に $\sin \theta$ を乗じる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_1 \cos^2 \theta = \sigma \cos^2 \theta + \tau \sin \theta \cos \theta \quad \cdots(1.2.2.3)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_3 \sin^2 \theta = \sigma \sin^2 \theta - \tau \cos \theta \sin \theta \quad \cdots(1.2.2.4)$$

上の2式を加えると、すべり面に作用する垂直応力 σ [Pa]が導かれる。

$$\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta = \sigma (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad \cdots(1.2.2.5)$$

$$\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 (1 - \cos^2 \theta) = \sigma \quad [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \quad \cdots(1.2.2.6)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \theta + \sigma_3 = \sigma \quad \cdots(1.2.2.7)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(1 + \cos 2\theta)/2 + \sigma_3 = \sigma \quad [\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1] \quad \cdots(1.2.2.8)$$

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta / 2 \quad \cdots(1.2.2.9)$$

x 方向のつり合い式の両辺に $\sin \theta$ を乗じる。 y 方向のつり合い式の両辺に $\cos \theta$ を乗じる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_1 \cos \theta \sin \theta = \sigma \cos \theta \sin \theta + \tau \sin^2 \theta \quad \cdots(1.2.2.10)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_3 \sin \theta \cos \theta = \sigma \sin \theta \cos \theta - \tau \cos^2 \theta \quad \cdots(1.2.2.11)$$

上の2式を差し引くと、すべり面に作用するせん断応力 τ [Pa]が導かれる。

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \cos \theta \sin \theta = \tau (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad \cdots(1.2.2.12)$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta / 2 \quad [\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \quad \cdots(1.2.2.13)$$

σ の式を変形する。

$$\sigma - (\sigma_1 + \sigma_3)/2 = (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta / 2 \quad \cdots(1.2.2.14)$$

$$[\sigma - (\sigma_1 + \sigma_3)/2]^2 = [(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta / 2]^2 \quad \cdots(1.2.2.15)$$

τ の式を変形する。

$$\tau^2 = [(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta / 2]^2 \quad \cdots(1.2.2.16)$$

上の2式を辺々加えると、モールの応力円が導かれる。

$$[\sigma - (\sigma_1 + \sigma_3)/2]^2 + \tau^2 = [(\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta / 2]^2 + [(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta / 2]^2 \quad \cdots(1.2.2.17)$$

$$\boxed{[\sigma - (\sigma_1 + \sigma_3)/2]^2 + \tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 / 4} \quad [\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1] \quad \cdots(1.2.2.18)$$

上式は、中心 $((\sigma_1 + \sigma_3)/2, 0)$ 、半径 $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ の円を表す。最大主応力面から角度 θ だけ傾いたすべり面 XX' に作用するせん断応力 τ [Pa]を図上で読み取る。この値がクーロン式より求められるせん断強さ τ [Pa]よりも小さければ、すべり面での粉体層の崩壊は起こらない。

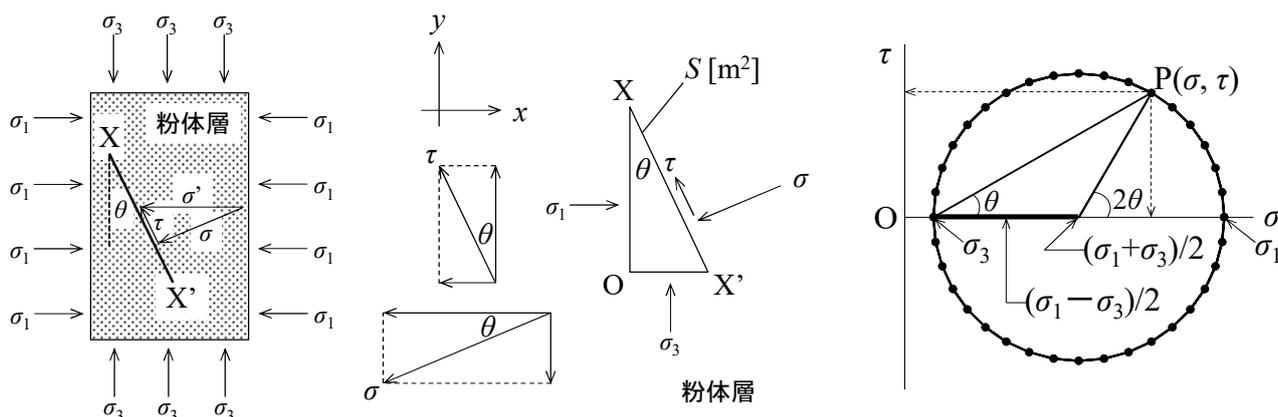


図 1.2.2.1 粉体層内の応力状態(2方向から垂直応力が作用する場合)

【計算例】粉体層内の応力状態

付着力 5.20 kPa、内部摩擦角 25°の粉体層に最大主応力 $\sigma_1=400$ kPa、最小主応力 $\sigma_3=100$ kPa が作用している。最大主応力面から角度 $\theta=30^\circ$ の面上に作用する①鉛直応力 σ [kPa]および②せん断応力 τ [kPa]を求めよ。また、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。ただし、粉体層の垂直面に対して最大主応力、水平面に対して最小主応力が作用するものとし、クーロン粉体を仮定する。(①325 kPa, ②130 kPa)

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 + (\sigma_1 - \sigma_3)(\cos 2\theta)/2 = (400 + 100)/2 + (400 - 100)(\cos 60^\circ)/2 = \boxed{325 \text{ kPa}}$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)(\sin 2\theta)/2 = (400 - 100)(\sin 60^\circ)/2 = 129.90 \text{ kPa} \doteq \boxed{130 \text{ kPa}}$$

$$\tau = C + \sigma \tan \phi = 5.20 + 325 \tan 25^\circ = 156.74 \text{ kPa} > 130 \text{ kPa} \text{ (崩壊しない)}$$

【問題】粉体層内の応力状態

- (1) 付着力 5.20 kPa、内部摩擦角 25°の粉体層に最大主応力 $\sigma_1=400$ kPa、最小主応力 $\sigma_3=100$ kPa が作用している。最大主応力面から角度 $\theta=45^\circ$ の面上に作用する①鉛直応力 σ [kPa]および②せん断応力 τ [kPa]を求めよ。また、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。ただし、粉体層の垂直面に対して最大主応力、水平面に対して最小主応力が作用するものとし、クーロン粉体を仮定する。(①250 kPa, ②150 kPa)
- (2) 付着力 5.20 kPa、内部摩擦角 25°の粉体層に最大主応力 $\sigma_1=400$ kPa、最小主応力 $\sigma_3=20$ kPa が作用している。最大主応力面から角度 $\theta=30^\circ$ の面上に作用する①鉛直応力 σ [kPa]および②せん断応力 τ [kPa]を求めよ。また、粉体層の崩壊が起こるかどうかを判定せよ。ただし、粉体層の垂直面に対して最大主応力、水平面に対して最小主応力が作用するものとし、クーロン粉体を仮定する。(①305 kPa, ②164 kPa)

1.2.3 2方向から垂直応力とせん断応力が作用する場合

直方体を仮定した粉体層の垂直面に対して垂直応力 σ_x [Pa]とせん断応力 τ_{xy} [Pa]、水平面に対して垂直応力 σ_y [Pa]とせん断応力 τ_{yx} [Pa]が作用する場合を考える。この場合、主応力の向きは垂直または水平ではなくなる。粉体層の垂直面から角度 θ だけ傾いた粉体層内のすべり面 XX' (断面積 S [m²])に対して作用

する垂直応力 σ [Pa]とせん断応力 τ [Pa]は、厚みのある微小な直角三角形 OXX'に対する x 方向と y 方向の力のつり合いより導かれる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_x \cos\theta + \tau_{yx} \sin\theta = \sigma \cos\theta + \tau \sin\theta \quad \cdots(1.2.3.1)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_y \sin\theta + \tau_{xy} \cos\theta = \sigma \sin\theta - \tau \cos\theta \quad \cdots(1.2.3.2)$$

粉体層の回転が起こらない場合、せん断応力 τ_{yx} と τ_{xy} の大きさは互いに等しい($\tau_{yx}=\tau_{xy}$)。

x 方向のつり合い式の両辺に $\cos\theta$ を乗じる。また、 y 方向のつり合い式の両辺に $\sin\theta$ を乗じる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_x \cos^2\theta + \tau_{xy} \sin\theta \cos\theta = \sigma \cos^2\theta + \tau \sin\theta \cos\theta \quad \cdots(1.2.3.3)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy} \cos\theta \sin\theta = \sigma \sin^2\theta - \tau \cos\theta \sin\theta \quad \cdots(1.2.3.4)$$

上の 2 式を加えると、すべり面に作用する垂直応力 σ [Pa]が導かれる。

$$\sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta = \sigma (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \quad \cdots(1.2.3.5)$$

$$\sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y (1 - \cos^2\theta) + \tau_{xy} \sin 2\theta = \sigma \quad [\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta, \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1] \quad \cdots(1.2.3.6)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y) \cos^2\theta + \sigma_y + \tau_{xy} \sin 2\theta = \sigma \quad \cdots(1.2.3.7)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)(1 + \cos 2\theta)/2 + \sigma_y + \tau_{xy} \sin 2\theta = \sigma \quad [\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1] \quad \cdots(1.2.3.8)$$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta / 2 + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \cdots(1.2.3.9)$$

x 方向のつり合い式の両辺に $\sin\theta$ を乗じる。 y 方向のつり合い式の両辺に $\cos\theta$ を乗じる。

$$(x \text{ 方向}) \quad \sigma_x \cos\theta \sin\theta + \tau_{xy} \sin^2\theta = \sigma \cos\theta \sin\theta + \tau \sin^2\theta \quad [\tau_{yx}=\tau_{xy}] \quad \cdots(1.2.3.10)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \sigma_y \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} \cos^2\theta = \sigma \sin\theta \cos\theta - \tau \cos^2\theta \quad \cdots(1.2.3.11)$$

上の 2 式を差し引くと、すべり面に作用するせん断応力 τ [Pa]が導かれる。

$$(\sigma_x - \sigma_y) \cos\theta \sin\theta + (\sin^2\theta - \cos^2\theta) \tau_{xy} = \tau (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \quad \cdots(1.2.3.12)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y) (\sin 2\theta) / 2 + (1 - 2\cos^2\theta) \tau_{xy} = \tau \quad [\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta, \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1] \quad \cdots(1.2.3.13)$$

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta / 2 - \tau_{xy} \cos 2\theta \quad [\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1] \quad \cdots(1.2.3.14)$$

σ の式を変形する。

$$\sigma - (\sigma_x + \sigma_y) / 2 = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta / 2 + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \cdots(1.2.3.15)$$

$$[\sigma - (\sigma_x + \sigma_y) / 2]^2 = [(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta / 2 + \tau_{xy} \sin 2\theta]^2 \quad \cdots(1.2.3.16)$$

τ の式を変形する。

$$\tau^2 = [(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta / 2 - \tau_{xy} \cos 2\theta]^2 \quad \cdots(1.2.3.17)$$

上の 2 式を辺々加えると、モールの応力円が導かれる。

$$[\sigma - (\sigma_x + \sigma_y) / 2]^2 + \tau^2 = [(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta / 2 + \tau_{xy} \sin 2\theta]^2 + [(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta / 2 - \tau_{xy} \cos 2\theta]^2 \quad \cdots(1.2.3.18)$$

$$[\sigma - (\sigma_x + \sigma_y) / 2]^2 + \tau^2 = [(\sigma_x - \sigma_y) / 2]^2 \cos^2 2\theta + (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta (\tau_{xy} \sin 2\theta) + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta$$

$$+ [(\sigma_x - \sigma_y) / 2]^2 \sin^2 2\theta - (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta (\tau_{xy} \cos 2\theta) + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta \quad \cdots(1.2.3.19)$$

$$[\sigma - (\sigma_x + \sigma_y) / 2]^2 + \tau^2 = [(\sigma_x - \sigma_y) / 2]^2 (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) + \tau_{xy}^2 (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) \quad \cdots(1.2.3.20)$$

$$\boxed{[\sigma - (\sigma_x + \sigma_y) / 2]^2 + \tau^2 = [(\sigma_x - \sigma_y) / 2]^2 + \tau_{xy}^2} \quad [\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1] \quad \cdots(1.2.3.21)$$

上式は、中心 $((\sigma_x + \sigma_y) / 2, 0)$ 、半径 $[(\sigma_x - \sigma_y)^2 / 4 + \tau_{xy}^2]^{0.5}$ の円を表す。この円は、粉体層の垂直面から角度 θ だけ傾いたすべり面 XX' に作用するせん断応力 τ [Pa]を図上で与える。 x - y 座標平面上における最大主応力と粉体層の水平面のなす角度 Ψ を求める。垂直応力 σ は角度 Ψ で極値をとり、最大または最小の主応力となる。

$$d\sigma/d\theta = d[(\sigma_x + \sigma_y) / 2 + (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\Psi / 2 + \tau_{xy} \sin 2\Psi] / d\theta = 0 \quad \cdots(1.2.3.22)$$

$$-(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\Psi + 2\tau_{xy} \cos 2\Psi = 0 \quad \cdots(1.2.3.23)$$

$$\tan 2\Psi = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y) \quad \cdots(1.2.3.24)$$

$$\Psi = (1/2)\tan^{-1}[2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)] \quad \cdots(1.2.3.25)$$

σ の式に代入して τ_{xy} を消去すると、最大主応力 σ_1 [Pa] と最小主応力 σ_3 [Pa] が導かれる。

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + [(\sigma_x - \sigma_y)/2]\cos 2\Psi + [(\sigma_x - \sigma_y)/2]\tan 2\Psi \sin 2\Psi \quad \cdots(1.2.3.26)$$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + [(\sigma_x - \sigma_y)/2]\cos 2\Psi + [(\sigma_x - \sigma_y)/2]\sin^2 2\Psi / \cos 2\Psi \quad \cdots(1.2.3.27)$$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + [(\sigma_x - \sigma_y)/2][(\cos^2 2\Psi + \sin^2 2\Psi) / \cos 2\Psi] \quad \cdots(1.2.3.28)$$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + [(\sigma_x - \sigma_y)/2](1/\cos 2\Psi) \quad [\sin^2 2\Psi + \cos^2 2\Psi = 1] \quad \cdots(1.2.3.29)$$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \pm [(\sigma_x - \sigma_y)/2](1 + \tan^2 2\Psi)^{1/2} \quad [1 + \tan^2 2\Psi = 1/\cos^2 2\Psi] \quad \cdots(1.2.3.30)$$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \pm [(\sigma_x - \sigma_y)/2][1 + 4\tau_{xy}^2/(\sigma_x - \sigma_y)^2]^{1/2} \quad [\tan 2\Psi = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)] \quad \cdots(1.2.3.31)$$

$$\sigma_1 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + [(\sigma_x - \sigma_y)/2][1 + 4\tau_{xy}^2/(\sigma_x - \sigma_y)^2]^{1/2} \quad \cdots(1.2.3.32)$$

$$\sigma_3 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 - [(\sigma_x - \sigma_y)/2][1 + 4\tau_{xy}^2/(\sigma_x - \sigma_y)^2]^{1/2} \quad \cdots(1.2.3.33)$$

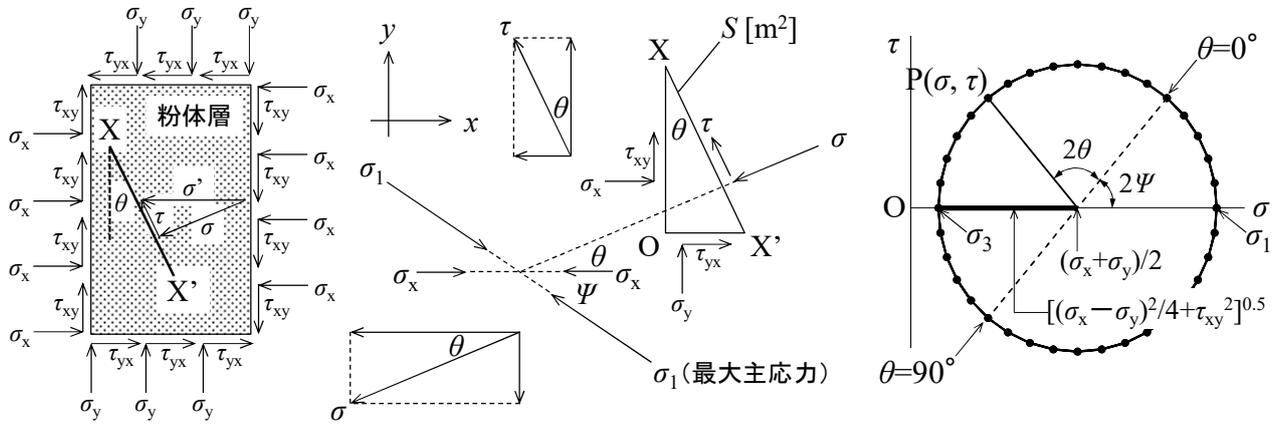


図 1.2.3.1 粉体層内の応力状態(2方向から垂直応力とせん断応力が作用する場合)

1.2.4 応力限界

粉体層の限界状態には、圧縮荷重が水平方向に作用して粉体層が斜め上方へ押し上げられようとする受動状態と、粉体層が水平方向に延伸されて自重のために崩壊しようとする主動状態の二つがある。前者の場合、最大主応力は水平方向、最小主応力は垂直方向となる。後者の場合、最大主応力は垂直方向、最小主応力は水平方向となる。以下、主動状態の粉体層に作用する主応力(粉体圧)の比と粉体層の摩擦角 ϕ の関係を導く。水平方向に作用する最小主応力 σ_3 を一定にして垂直方向に作用する最大主応力 σ_1 を増加させてゆくと(三軸圧縮試験)、図上ではモール円の半径が大きくなり、破壊包絡線と接したところで粉体層の崩壊が起こる。破壊包絡線を外挿したときの σ 軸との交点 $P(-\sigma_0, 0)$ と限界状態のモール円の中心 Q とそこから破壊包絡線に向かって降ろした垂線の足 R を結んでできる三角形 PQR を考える。クーロン粉体のモール円の半径を表す線分 QR の長さは、次式のように表される。

$$QR = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = [(\sigma_1 - \sigma_0) - (\sigma_3 - \sigma_0)]/2 \quad \cdots(1.2.4.1)$$

線分 PQ の長さは、次式のように導かれる。

$$PQ = -\sigma_0 + \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 - \sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_0)/2 = [(\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_3 - \sigma_0)]/2 \quad \cdots(1.2.4.2)$$

線分 QR と線分 PQ の関係は、次式のように導かれる。

$$QR=PQ\sin\phi \quad \cdots(1.2.4.3)$$

$$[(\sigma_1-\sigma_0)-(\sigma_3-\sigma_0)]/2=[(\sigma_1-\sigma_0)+(\sigma_3-\sigma_0)]\sin\phi/2 \quad \cdots(1.2.4.4)$$

$$(\sigma_1-\sigma_0)-(\sigma_3-\sigma_0)=[(\sigma_1-\sigma_0)+(\sigma_3-\sigma_0)]\sin\phi \quad \cdots(1.2.4.5)$$

$$(\sigma_1-\sigma_0)(1-\sin\phi)=(\sigma_3-\sigma_0)(1+\sin\phi) \quad \cdots(1.2.4.6)$$

$$(\sigma_3-\sigma_0)/(\sigma_1-\sigma_0)=(1-\sin\phi)/(1+\sin\phi) \quad \cdots(1.2.4.7)$$

非付着性粉体($C=0$)の場合は、次式となる。

$$\sigma_3/\sigma_1=(1-\sin\phi)/(1+\sin\phi)(\equiv K_a) [\sigma_0=0] \quad \cdots(1.2.4.8)$$

$$K_a(=P_h/P_v)=(1-\sin\phi)/(1+\sin\phi) [\sigma_1=P_v, \sigma_3=P_h] \quad \cdots(1.2.4.9)$$

ただし、 P_h は水平方向の粉体圧[Pa]、 P_v は垂直方向の粉体圧[Pa]、 K_a はランキン係数[-]。

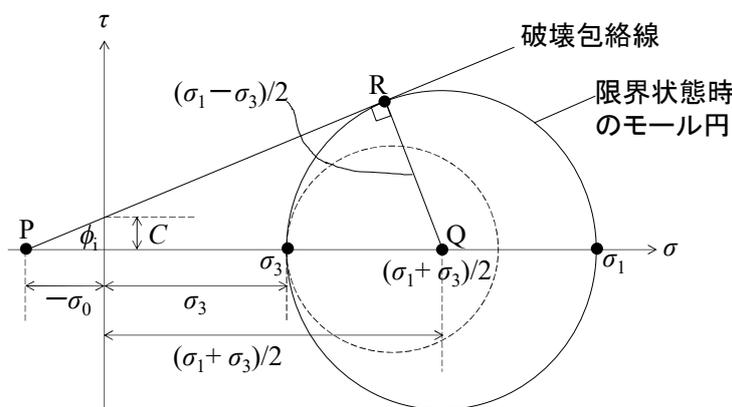


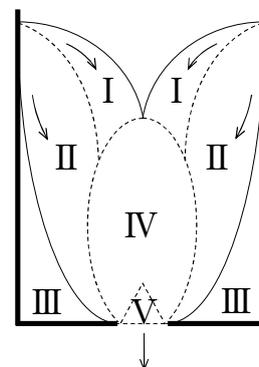
図 1.2.4.1 破壊包絡線とモールの円の関係

σ_3 を一定にして σ_1 を増大させてゆくと、モールの円は破線から実線の方へと大きくなる。破壊包絡線を接線とする円と σ 軸との交点 σ_1 に達すると、粉体層の崩壊が起こる。

2. 粉粒体の流れ

2. 1 流出機構

平底容器の底面中心に設けた円形の排出口(オリフィス)からの粉体流出挙動を考える[文献 2]。領域 I の粉体層は、領域 II の粉体層の上を速やかにすべり落ちる。領域 II の粉体層は、領域 III の粉体層の上をゆるやかにすべり落ちる。領域 III の粉体層は、静止している。領域 I と II の粉体層は、領域 IV へ供給される。領域 IV の粉体層は、下向きに速やかに流れ落ちる。領域 V の粉体層は、自由落下の状態であらゆる穴から流出する。排出口の近傍では定常的にアーチ構造が形成される。すなわち、アーチを構成する粒子は下に落ちて、代わりに新しい粒子が上から落ちて補充される。このような準静的アーチを動的アーチといい、架橋を形成して閉塞の元となる静的アーチとは区別される。この動的アーチ構造のために上部の粉体圧が支えられるため、排出口からの粉体流出速度は層高に依存しない。



2. 2 流出速度

2.2.1 アーチ形状説[文献 3, 4]

アーチ形状を半円の円弧と仮定すると、アーチ形状は円の方程式を用いて表される。

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{D_0}{2}\right)^2 \quad \cdots(2.2.1.1)$$

$$y = \sqrt{(D_0/2)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - (x/a)^2} \quad [a \equiv D_0/2] \quad \cdots(2.2.1.2)$$

排出口 (直径 D_0 [m]) 内の $x=x \sim x+dx$ で切り取られる幅 dx の微小円環から排出される粉体の流出流量 dQ [m^3/s]は、次式で表される。

$$dQ = (2\pi x dx)u \quad \cdots(2.2.1.3)$$

粉体流速 u [m/s]は、ベルヌーイの定理を用いる。

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad \cdots(2.2.1.4)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(h_1 - h_2) + \frac{u_1^2}{2} = \frac{u_2^2}{2} \quad \cdots(2.2.1.5)$$

$$0 + gy + 0 = \frac{u^2}{2} \quad \cdots(2.2.1.6)$$

$$u = \sqrt{2gy} \quad \cdots(2.2.1.7)$$

dQ の式に代入して積分すると、排出口全体からの流出流量 Q [m^3/s]が導かれる。

$$dQ = 2\pi x dx \sqrt{2gy} \quad \cdots(2.2.1.8)$$

$$dQ = 2\pi x dx \sqrt{2ga\sqrt{1 - (x/a)^2}} \quad \cdots(2.2.1.9)$$

$$dQ = (2\pi\sqrt{2ga})x[1 - (x/a)^2]^{1/4} dx \quad \cdots(2.2.1.10)$$

$$Q = 2\pi\sqrt{2ga} \int_0^{D_0/2} x[1 - (x/a)^2]^{1/4} dx \quad \cdots(2.2.1.11)$$

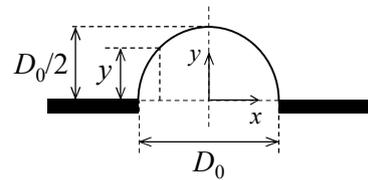
$$Q = 2\pi\sqrt{2ga} \int_0^a x[1 - (x/a)^2]^{1/4} dx \quad \cdots(2.2.1.12)$$

$$Q = 2\pi\sqrt{2ga} \int_0^1 at(1 - t^2)^{1/4} (dx/dt)dt \quad [t \equiv x/a] \quad \cdots(2.2.1.13)$$

$$Q = 2\pi\sqrt{2ga} \int_0^1 at(1 - t^2)^{1/4} a dt \quad \cdots(2.2.1.14)$$

$$Q = 2\pi\sqrt{2ga} a^{2.5} \int_0^1 t(1 - t^2)^{1/4} dt \quad \cdots(2.2.1.15)$$

$$Q = 2\pi\sqrt{2ga} a^{2.5} \int_1^0 (\sqrt{1 - X})X^{1/4} (dt/dX)dX \quad \cdots(2.2.1.16)$$



$$Q = 2\pi\sqrt{2ga^{2.5}} \int_1^0 \sqrt{1-X} X^{1/4} \frac{dX}{-2\sqrt{1-X}} \quad [X \equiv 1-t^2] \quad \cdots(2.2.1.17)$$

$$Q = \pi\sqrt{2ga^{2.5}} \int_0^1 X^{1/4} dX \quad \cdots(2.2.1.18)$$

$$Q = \frac{4}{5}\pi\sqrt{2ga^{2.5}} \quad \cdots(2.2.1.19)$$

$$Q = \frac{4}{5}\pi\sqrt{2g} \left(\frac{D_0}{2}\right)^{2.5} \quad \cdots(2.2.1.20)$$

$$\boxed{Q \approx 1.97D_0^{2.5}} \quad \cdots(2.2.1.21)$$

粉体の場合は、上式のように層高には無関係であり、流出流量は排出口径の 2.5 乗に比例する。
液体の場合は、次式のように液高の 0.5 乗に比例し、流出流量は排出口径の 2 乗に比例する。

$$Q = uS = \sqrt{2gh} \pi(D_0/2)^2 \approx 3.48h^{0.5} D_0^2 \quad \cdots(2.2.1.22)$$

本法で導かれた式は単純だが、アーチ形状を半円の円弧と仮定している点や粉体の性質に関する情報が式中に含まれない点で問題が残る。

2.2.2 粉体エネルギー説 [文献 5]

円形排出口 (直径 D_0) の近傍には自由落下アーチが形成される (曲率半径 R_c)。このアーチより上方では原点に向かう流速 u_p の直線的な流れが角度 $0 \sim 2\beta$ の範囲で放射状に広がる (曲率半径 R)。自由落下アーチより下方では、排出口の両端で幅 $k/2$ ずつだけ狭められて縮流が形成され、自由落下の状態で鉛直下向きに流れる。

原点から $R\cos\theta$ の高さにある微小体積 dV の流動粉体がつもつエネルギー $E dV$ [J] は、圧力項を無視して次式で表される。

$$E dV = \rho_B dV g R \cos\theta + \frac{1}{2} \rho_B dV u_p^2 \quad \cdots(2.2.2.1)$$

$$E = \rho_B g R \cos\theta + \frac{1}{2} \rho_B u_p^2 \quad \cdots(2.2.2.2)$$

粉体の流下速度 u_p [m/s] は断面積に反比例するので、適当な定数 λ を用いて等式化する。

$$u_p \propto \frac{1}{\pi(R\cos\theta)^2} = \frac{\lambda}{\pi R^2 \cos^2\theta} \quad \cdots(2.2.2.3)$$

流下中の粉体がつもつエネルギーは原点に近づくにつれて減少し、自由落下アーチの位置で最小となる。このときの臨界曲率半径 R_c は、次式のように導かれる。

$$\frac{dE}{dR} = \frac{d}{dR} \left(\rho_B g R \cos\theta + \frac{1}{2} \rho_B u_p^2 \right) \quad \cdots(2.2.2.4)$$

$$\frac{dE}{dR} = \rho_B g \cos\theta + \frac{1}{2} \rho_B \frac{d}{dR} \left(\frac{\lambda}{\pi R^2 \cos^2\theta} \right)^2 \quad \cdots(2.2.2.5)$$

$$\frac{dE}{dR} = \rho_B g \cos \theta + \frac{1}{2} \rho_B \frac{d}{dR} \left(\frac{\lambda^2}{\pi^2 R^4 \cos^4 \theta} \right) \quad \cdots(2.2.2.6)$$

$$\frac{dE}{dR} = \rho_B g \cos \theta + \frac{\rho_B \lambda^2}{2\pi^2 \cos^4 \theta} \left(\frac{-4}{R^5} \right) \quad \cdots(2.2.2.7)$$

$$\frac{dE}{dR} = \rho_B g \cos \theta - \frac{2\rho_B \lambda^2}{\pi^2 R^5 \cos^4 \theta} \quad \cdots(2.2.2.8)$$

$$\rho_B g \cos \theta - \frac{2\rho_B \lambda^2}{\pi^2 R_c^5 \cos^4 \theta} = 0 \quad \cdots(2.2.2.9)$$

$$\pi^2 R_c^5 \cos^4 \theta = \frac{2\rho_B \lambda^2}{\rho_B g \cos \theta} \quad \cdots(2.2.2.10)$$

$$R_c = \left(\frac{2\lambda^2}{\pi^2 g \cos^5 \theta} \right)^{1/5} \quad \cdots(2.2.2.11)$$

最小曲率半径 R_c は、次式によっても導かれる。

$$2R_c \sin \beta = D_0 - 2(k/2) \quad \cdots(2.2.2.12)$$

$$R_c = \frac{D_0 - k}{2 \sin \beta} \quad \cdots(2.2.2.13)$$

R_c の式に代入して定数 λ を求める。

$$\left(\frac{2\lambda^2}{\pi^2 g \cos^5 \theta} \right)^{1/5} = \frac{D_0 - k}{2 \sin \beta} \quad \cdots(2.2.2.14)$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 g}{2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \beta} \frac{D_0 - k}{2} \right)^5 \quad \cdots(2.2.2.15)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 g}{(2^3)^2} \left[\frac{\cos \theta}{\sin \beta} (D_0 - k) \right]^{5/2}} \quad \cdots(2.2.2.16)$$

$$\lambda = \frac{\pi \sqrt{g}}{8} \left[\frac{\cos \theta}{\sin \beta} (D_0 - k) \right]^{5/2} \quad \cdots(2.2.2.17)$$

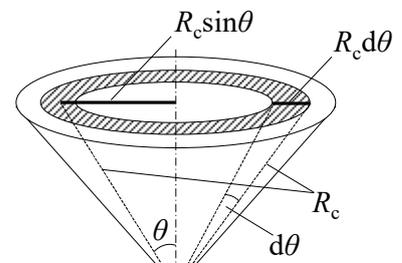
u_p の式に代入すると、流動粉体の最小流下速度 u_{pc} [m/s] が導かれる。

$$u_{pc} = \frac{\pi \sqrt{g}}{8} \left[\frac{\cos \theta}{\sin \beta} (D_0 - k) \right]^{5/2} \bigg/ \left[\pi \left(\frac{D_0 - k}{2 \sin \beta} \right)^2 \cos^2 \theta \right] \quad \cdots(2.2.2.18)$$

$$u_{pc} = \left[\frac{\pi \sqrt{g}}{8} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right)^{5/2} (D_0 - k)^{5/2} \right] \bigg/ \left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right)^2 (D_0 - k)^2 \right] \quad \cdots(2.2.2.19)$$

$$u_{pc} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right)^{1/2} (D_0 - k)^{1/2} \sqrt{g} \quad \cdots(2.2.2.20)$$

質量流出流量 W [kg/s] は、幅 $R_c d\theta$ および周長 $2\pi R_c \sin \theta$ からなる微小円環 (断面積 dS_c) から排出する粉体の流出流量 dQ [m³/s] を積分して導かれる。



$$W = \int \rho_B dQ \quad \cdots(2.2.2.21)$$

$$W = \int \rho_B u_{pc} dS_c \quad \cdots(2.2.2.22)$$

$$W = \int_0^\beta \rho_B u_{pc} (2\pi R_c \sin \theta) (R_c d\theta) \quad \cdots(2.2.2.23)$$

$$W = \int_0^\beta 2\pi \rho_B u_{pc} R_c^2 \sin \theta d\theta \quad \cdots(2.2.2.24)$$

$$W = \int_0^\beta 2\pi \rho_B \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right)^{1/2} (D_0 - k)^{1/2} \sqrt{g} \right] \left(\frac{D_0 - k}{2 \sin \beta} \right)^2 \sin \theta d\theta \quad \cdots(2.2.2.25)$$

$$W = \int_0^\beta \frac{\pi \rho_B}{4} \left[\left(\frac{\cos^{1/2} \theta}{\sin^{5/2} \beta} \right) (D_0 - k)^{5/2} \sqrt{g} \right] \sin \theta d\theta \quad \cdots(2.2.2.26)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left(\frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \int_0^\beta \cos^{1/2} \theta \sin \theta d\theta \quad \cdots(2.2.2.27)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left(\frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \int_1^{\cos^{1/2} \beta} t \sqrt{1-t^4} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) dt \quad [t \equiv \cos^{1/2} \theta] \quad \cdots(2.2.2.28)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left(\frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \int_1^{\cos^{1/2} \beta} t \sqrt{1-t^4} \left(-\frac{2t}{\sqrt{1-t^4}} \right) dt \quad \cdots(2.2.2.29)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left(\frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \int_1^{\cos^{1/2} \beta} (-2t^2) dt \quad \cdots(2.2.2.30)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{4} \left(\frac{D_0 - k}{\sin \beta} \right)^{5/2} \left[-\frac{2}{3} t^3 \right]_1^{\cos^{1/2} \beta} \quad \cdots(2.2.2.31)$$

$$W = \frac{\pi \rho_B \sqrt{g}}{6} \left(\frac{1 - \cos^{3/2} \beta}{\sin^{5/2} \beta} \right) (D_0 - D_p)^{5/2} \quad [k \approx D_p] \quad \cdots(2.2.2.32)$$

排出口のアーチ形状に着目して導かれた式と同様、流出流量は排出口径 D_0 の 2.5 乗に比例する。流れの縮小幅 k は、粉体層の粒子径 D_p 程度であることが知られている [文献 6]。流出角 β [deg.] は、粉体特性や容器形状に依存する。円錐状のホッパーから排出される場合は、内部摩擦角 ϕ [deg.] に対する次の相関式を用いる [文献 7]。

$$\beta = 50^\circ - \frac{\phi}{2} \quad \cdots(2.2.2.33)$$

ホッパー角が分かっている場合は、ホッパーの半頂角 θ [deg.] を近似的に流出角と見なす ($\beta \approx \theta$) [文献 8]。

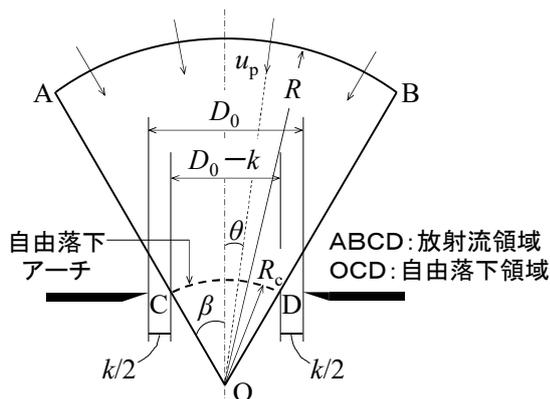


図 2. 2. 2. 1 円形排出口(オリフィス)からの粉体流出モデル [文献 5]

【計算例】重力流動

- (1) 平均粒子径 100 μm 、かさ密度 800 kg/m^3 、内部摩擦角 27° の粉体を 5.00 cm の小孔から流出させるときの流出速度 W [kg/s]を求めよ。(0.747 kg/s)

$$\beta = 50^\circ - (\phi/2) = 50^\circ - (27^\circ/2) = 36.5^\circ$$

$$W = (\pi \rho_b g^{1/2} / 6) [(1 - \cos^3 \beta) / \sin^{5/2} \beta] (D_0 - D_p)^{5/2}$$

$$= [800\pi(9.81)^{1/2}/6] [(1 - \cos^3 36.5^\circ) / \sin^{5/2} 36.5^\circ] (5.00 \times 10^{-2} - 100 \times 10^{-6})^{5/2} = 0.74686 \text{ kg/s} \doteq \boxed{0.747 \text{ kg/s}}$$

- (2) 平均粒子径 500 μm 、かさ密度 800 kg/m^3 、内部摩擦角 27° の粉体を毎秒 1.00 kg 流出させるのに必要な流出口径 D_0 [cm]を求めよ。(5.66 cm)

$$\beta = 50^\circ - (\phi/2) = 50^\circ - (27^\circ/2) = 36.5^\circ$$

$$D_0 = D_p + [W / \{(\pi \rho_b g^{1/2} / 6) \{ (1 - \cos^3 \beta) / \sin^{5/2} \beta \} \}]^{2/5}$$

$$= 500 \times 10^{-6} + [1.00 / \{ (800\pi(9.81)^{1/2} / 6) \{ (1 - \cos^3 36.5^\circ) / \sin^{5/2} 36.5^\circ \} \}]^{2/5} = 0.056579 \text{ m} \doteq \boxed{5.66 \text{ cm}}$$

【問題】重力流動

- (1) 平均粒子径 10.0 μm 、かさ密度 800 kg/m^3 、内部摩擦角 27° の粉体を 5.00 cm の小孔から流出させるときの流出速度 W [kg/s]を求めよ。(0.750 kg/s)
- (2) 平均粒子径 5.00 μm 、かさ密度 800 kg/m^3 、内部摩擦角 27° の粉体を毎秒 1.00 kg 流出させるのに必要な流出口径 D_0 [cm]を求めよ。(5.61 cm)

3. 固体貯槽

気体・液体・粉粒体の貯蔵と排出を行う設備を貯槽という。ここでは粉粒体を対象とする。貯槽は、敷地面積の余裕が無い場合や貯蔵物を風雨から防ぐ点で有効だが、石炭や鉱石のように土地や天候の影響が問題にならない場合は、野積みや倉庫方式となる。貯槽の種類には、大量かつ長期間の貯蔵を目的とするサイロ、製造工程中における条件調整のため短期間の貯蔵を目的とするビン、粉体の定量的な供給を目的とするホッパーなどがある。サイロの種類には、ホッパー型(おもに金属製)、スカート型(おもにコンクリート製)、平底型があり、単槽または複数の単槽を連結した群槽として用いる。貯蔵物の自由表面からの深さ h と貯槽径 D の比 h/D が 1.5 以下のものを浅槽、それよりも大きいものを深槽という。

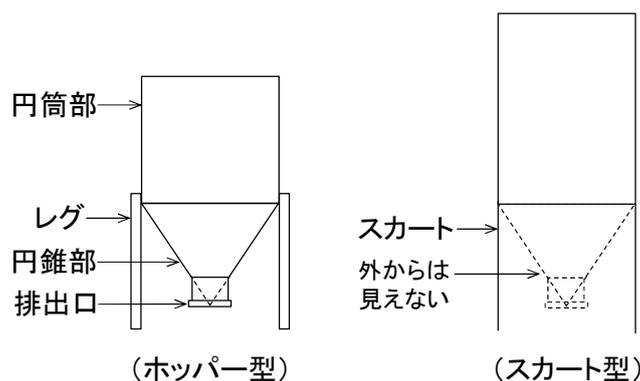


図 3.1 固体貯槽の例

3. 1 寸法設計

3.1.1 貯槽容積

貯槽容積 V_T [m³]は、貯蔵物容積 V_b と貯槽容積 V_T の比 V_b/V_T の目安が 0.85~0.95 であることから [文献 9]、次式で決定される。

$$V_T \doteq 1.1V_b \quad \cdots(3.1.1.1)$$

貯蔵物容積 V_b は、貯蔵物重量 M [kg] とかさ密度 ρ_b [kg/m³] の比で表される。

$$V_b = \frac{M}{\rho_b} \quad \cdots(3.1.1.2)$$

3.1.2 貯槽径

円筒貯槽の槽径 D [m] は、幾何学的な貯蔵物容積 V_b [m³] の式より導かれる。貯蔵物の深さは、堆積面を水平にならした自由表面を基準に取る。

$$V_b = \pi R^2 H + \frac{1}{3} \pi R^2 L \quad \cdots(3.1.2.1)$$

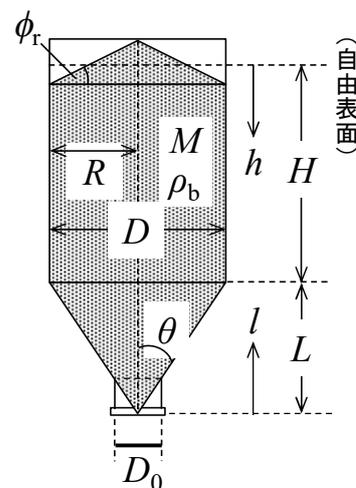
$$V_b = \frac{\pi D^2}{4} H + \frac{\pi D^2}{12} L \quad \left[R = \frac{D}{2} \right] \quad \cdots(3.1.2.2)$$

$$V_b = \frac{\pi D^2}{4} \left(H + \frac{L}{3} \right) \quad \cdots(3.1.2.3)$$

$$V_b = \frac{\pi D^2}{4} \left(H + \frac{R}{3 \tan \theta} \right) \quad \left[\tan \theta = \frac{R}{L} \right] \quad \cdots(3.1.2.4)$$

$$V_b = \frac{\pi D^2}{4} \left(H + \frac{D}{6 \tan \theta} \right) \quad \cdots(3.1.2.5)$$

$$V_b = \frac{\pi D^3}{4} \left(\frac{H}{D} + \frac{1}{6 \tan \theta} \right) \quad \cdots(3.1.2.6)$$



$$D = \left[\frac{4V_b}{\pi} \left(\frac{H}{D} + \frac{1}{6 \tan \theta} \right)^{-1} \right]^{1/3} \quad \cdots(3.1.2.7)$$

ただし、 D は槽径[m]、 D_0 は排出口径[m]、 H は円筒部深さ[m](自由表面を基準に取る)、 R は貯槽半径[m]、 L は円錐部深さ[m]、 V_T は貯槽容積[m³]、 θ は円錐排出部の半頂角[deg.]。

3.1.3 貯槽形状 [文献 9]

①ホッパー型の場合 貯槽の建設費 E [-]は、単位面積当たりの建設費を側壁部で 1、屋根部で i 、底板部で j として次式のように導かれる。

$$E = 2\pi RH + \pi R^2 i + \pi R \sqrt{R^2 + L^2} j \quad \cdots(3.1.3.1)$$

$$E = \pi DH + \frac{\pi D^2}{4} i + \frac{\pi D}{2} \sqrt{\frac{D^2}{4} + L^2} j \quad \cdots(3.1.3.2)$$

$$E = \pi DH + \frac{\pi D^2}{4} i + \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{1 + 4k^2} j \quad \left[\frac{L}{D} \equiv k \right] \quad \cdots(3.1.3.3)$$

貯槽容積 V_T の式を用いて H を消去する。

$$E = \pi D \left(\frac{4V_T}{\pi D^2} - \frac{4\pi k D^3}{12\pi D^2} \right) + \frac{\pi D^2}{4} i + \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{1 + 4k^2} j \quad \left[V_T \approx \frac{\pi D^2 H}{4} + \frac{\pi k D^3}{12} \right] \quad \cdots(3.1.3.4)$$

$$E = \pi D \left(\frac{4V_T}{\pi D^2} - \frac{kD}{3} \right) + \frac{\pi D^2}{4} i + \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{1 + 4k^2} j \quad \cdots(3.1.3.5)$$

$$E = \frac{4V_T}{D} - \frac{\pi k D^2}{3} + \frac{\pi D^2}{4} i + \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{1 + 4k^2} j \quad \cdots(3.1.3.6)$$

上式の極小値を与える円筒部深さ－槽径比 H/D を求める。

$$\frac{dE}{dD} = -\frac{4V_T}{D^2} - \frac{2\pi k D}{3} + \frac{\pi D}{2} i + \frac{\pi D}{2} \sqrt{1 + 4k^2} j = 0 \quad \cdots(3.1.3.7)$$

$$-4V_T - \frac{2\pi k D^3}{3} + \frac{\pi D^3}{2} i + \frac{\pi D^3}{2} \sqrt{1 + 4k^2} j = 0 \quad \cdots(3.1.3.8)$$

$$-4 \left[\frac{\pi D^3}{4} \left(\frac{H}{D} \right) + \frac{\pi k D^3}{12} \right] - \frac{2\pi k D^3}{3} + \frac{\pi D^3}{2} i + \frac{\pi D^3}{2} \sqrt{1 + 4k^2} j = 0 \quad \cdots(3.1.3.9)$$

$$-\frac{H}{D} - k + \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{1 + 4k^2} j}{2} = 0 \quad \cdots(3.1.3.10)$$

$$\frac{H}{D} = \frac{i + \sqrt{1 + 4k^2} j - 2k}{2} \quad \cdots(3.1.3.11)$$

$i=j=k=1$ のとき、円錐部深さ－槽径比 L/D は 1、円筒部深さ－槽径比 H/D は約 0.62 となる。これらがホッパー型の経済的な貯槽形状となる。なお、円筒部深さは近似的に自由表面からの深さに等しいものと仮定した。

②スカート型の場合 貯槽の建設費 E [-]は、単位面積当たりの建設費を側壁部で 1、屋根部で i 、底板部で j として次式のように導かれる。

$$E = 2\pi R(L + H) + \pi R^2 i + \pi R \sqrt{R^2 + L^2} j \quad \cdots(3.1.3.12)$$

$$E = \pi DL + \pi DH + \frac{\pi D^2}{4} i + \frac{\pi D}{2} \sqrt{\frac{D^2}{4} + L^2} j \quad \cdots(3.1.3.13)$$

$$E = \pi k D^2 + \pi DH + \frac{\pi D^2}{4} i + \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{1 + 4k^2} j \quad \left[\frac{L}{D} \equiv k \right] \quad \cdots(3.1.3.14)$$

$$E = \pi k D^2 + \pi D \left(\frac{4V_T}{\pi D^2} - \frac{4\pi k D^3}{12\pi D^2} \right) + \frac{\pi D^2}{4} i + \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{1 + 4k^2} j \quad \left[V_T \approx \frac{\pi D^2 H}{4} + \frac{\pi k D^3}{12} \right] \quad \cdots(3.1.3.15)$$

$$E = \pi k D^2 + \pi D \left(\frac{4V_T}{\pi D^2} - \frac{kD}{3} \right) + \frac{\pi D^2}{4} i + \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{1 + 4k^2} j \quad \cdots(3.1.3.16)$$

$$E = \pi k D^2 + \frac{4V_T}{D} - \frac{\pi k D^2}{3} + \frac{\pi D^2}{4} i + \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{1 + 4k^2} j \quad \cdots(3.1.3.17)$$

上式の極小値を与える円筒部深さ－槽径比 H/D を求める。

$$\frac{dE}{dD} = 2\pi k D - \frac{4V_T}{D^2} - \frac{2\pi k D}{3} + \frac{\pi D}{2} i + \frac{\pi D}{2} \sqrt{1 + 4k^2} j = 0 \quad \cdots(3.1.3.18)$$

$$2\pi k D^3 - 4V_T - \frac{2\pi k D^3}{3} + \frac{\pi D^3}{2} i + \frac{\pi D^3}{2} \sqrt{1 + 4k^2} j = 0 \quad \cdots(3.1.3.19)$$

$$2\pi k D^3 - 4 \left[\frac{\pi D^3}{4} \left(\frac{H}{D} \right) + \frac{\pi k D^3}{12} \right] - \frac{2\pi k D^3}{3} + \frac{\pi D^3}{2} i + \frac{\pi D^3}{2} \sqrt{1 + 4k^2} j = 0 \quad \cdots(3.1.3.20)$$

$$2k - \left(\frac{H}{D} \right) - \frac{k}{3} - \frac{2k}{3} + \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{1 + 4k^2} j}{2} = 0 \quad \cdots(3.1.3.21)$$

$$\boxed{\frac{H}{D} = \frac{i + \sqrt{1 + 4k^2} j + 2k}{2}} \quad \cdots(3.1.3.22)$$

$i=j=k=1$ のとき、円錐部深さ－槽径比 L/D は 1、円筒部深さ－槽径比 H/D は約 2.62 となる。これらがスカート型の経済的な貯槽形状となる。なお、円筒部深さは近似的に自由表面からの深さに等しいものと仮定した。

3.1.4 排出角

円錐排出部の半頂角 θ は、次式より求める。

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{2(L/D)} \quad \left[\tan \theta = \frac{R}{L}, R = \frac{D}{2} \right] \quad \cdots(3.1.4.1)$$

マスフロー設計を行う場合は、最適排出角 θ_{opt} を満たすように L/D 値を修正する。

$$\frac{L}{D} = \frac{1}{2 \tan \theta_{\text{opt}}} \quad \cdots(3.1.4.2)$$

【計算例】貯槽寸法

かさ密度 0.800 t/m^3 の小麦 500 t をスカート型円筒サイロに貯蔵する場合の①貯槽容積 $V_T [\text{m}^3]$ 、②排出角 $\theta [\text{deg}]$ 、③貯槽径 $D [\text{m}]$ 、④円筒部深さ $H [\text{m}]$ 、⑤円錐部深さ $L [\text{m}]$ 、⑥排出口径 $D_0 [\text{m}]$ を求めよ。ただ

し、貯槽容積－貯蔵物容積比 1.1、排出口径－槽径比 1/10、貯槽形状は経済的に最適な設計とする。(① 688 m³, ②26.6°, ③6.46 m, ④16.9 m, ⑤6.46 m, ⑥0.646 m)

$$V_b = M/\rho_b = 500/0.800 = 625 \text{ m}^3$$

$$V_T = (V_T/V_b)V_b = (1.1)(625) = 687.5 \text{ m}^3 \doteq \boxed{688 \text{ m}^3}$$

$$\theta = \tan^{-1}[(0.5)/(L/D)^{-1}] = \tan^{-1}[(0.5)/(1)^{-1}] = 26.565^\circ \doteq \boxed{26.6^\circ}$$

$$D = [(4V_b/\pi) \{ (H/D) + (1/6 \tan \theta) \}]^{1/3} = [(4)(625/\pi) \{ (2.62) + (1/6 \tan 26.565^\circ) \}]^{1/3} = 6.4589 \text{ m} \doteq \boxed{6.46 \text{ m}}$$

$$H = (H/D)D = (2.62)(6.4589) = 16.922 \text{ m} \doteq \boxed{16.9 \text{ m}}$$

$$L = (L/D)D = (1)(6.4589) = 6.4589 \text{ m} \doteq \boxed{6.46 \text{ m}}$$

$$D_0 = (D_0/D)D = (1/10)(6.4589) = 0.64589 \text{ m} \doteq \boxed{0.646 \text{ m}}$$

【問題】貯槽寸法

- (1) かさ密度 0.650 t/m³ の大豆 130 t をスカート型円筒サイロに貯蔵する場合の①貯槽容積 V_T [m³]、②排出角 θ [deg.]、③貯槽径 D [m]、④円筒部深さ H [m]、⑤円錐部深さ L [m]、⑥排出口径 D_0 [m] を求めよ。ただし、貯槽容積－貯蔵物容積比 1.1、排出口径－槽径比 1/10、貯槽形状は経済的に最適な設計とする。(①220 m³, ②26.6°, ③4.42 m, ④11.6 m, ⑤4.42 m, ⑥0.442 m)
- (2) かさ密度 0.800 t/m³ の小麦 20.0 t をホッパー型円筒サイロに貯蔵する場合の①貯槽容積 V_T [m³]、②排出角 θ [deg.]、③貯槽径 D [m]、④円筒部深さ H [m]、⑤円錐部深さ L [m]、⑥排出口径 D_0 [m] を求めよ。ただし、貯槽容積－貯蔵物容積比 1.1、排出口径－槽径比 1/10、貯槽形状は経済的に最適な設計とする。(①27.5 m³, ②26.6°, ③3.22 m, ④2.00 m, ⑤3.22 m, ⑥0.322 m)

3. 2 粉体圧

3.2.1 円筒部 [文献 10]

槽径 D [m]、深さ H [m] の貯槽円筒部 (断面積 S [m²]) にかさ密度 ρ_b [kg/m³] の粉粒体が均一に充填されているものとする。貯蔵物の自由表面 (堆積面を平らにならした状態) から深さ h [m] の位置にある層高 dh [m] の微小粉体層 (容積 dV [m³]) に作用する垂直圧を P_v [Pa]、水平圧を P_h [Pa]、壁摩擦力を τ_w [Pa]、反力を壁圧 P_w [Pa] とする。

①深槽 ($h/D > 1.5$) の場合 深さ方向の静的粉体圧分布は Janssen (ヤンセン) の式で表され、微小粉体層に作用する力のつり合いより導かれる。

$$P_v S + \rho_b g dV = (P_v + dP_v) S + \tau_w dA \quad \cdots (3.2.1.1)$$

$$P_v (\pi D^2/4) + \rho_b g (\pi D^2/4) dh = (P_v + dP_v) (\pi D^2/4) + (\mu_w P_h) (\pi D dh) \quad \cdots (3.2.1.2)$$

$$P_v (\pi D^2/4) + \rho_b g (\pi D^2/4) dh = (P_v + dP_v) (\pi D^2/4) + (\mu_w K_a P_v) (\pi D dh) \quad [P_h = K_a P_v] \quad \cdots (3.2.1.3)$$

$$P_v + \rho_b g dh = (P_v + dP_v) + (4\mu_w K_a P_v dh)/D \quad \cdots (3.2.1.4)$$

$$D\rho_b g dh = DdP_v + 4\mu_w K_a P_v dh \quad \cdots (3.2.1.5)$$

$$(D\rho_b g - 4\mu_w K_a P_v) dh = DdP_v \quad \cdots (3.2.1.6)$$

$$\int_0^h dh = \int_{P_0}^{P_v} \frac{dP_v}{\rho_b g - (4\mu_w K_a/D) P_v} \quad \cdots (3.2.1.7)$$

$$h = [-1/(4\mu_w K_a/D)] [\ln \{ \rho_b g - (4\mu_w K_a/D) P_v \}]_{P_0}^{P_v} \quad \cdots (3.2.1.8)$$

$$(4\mu_w K_a/D)h = \ln[\{\rho_b g - (4\mu_w K_a/D)P_0\} / \{\rho_b g - (4\mu_w K_a/D)P_v\}] \quad \cdots(3.2.1.9)$$

$$\exp[(4\mu_w K_a/D)h] = [\rho_b g - (4\mu_w K_a/D)P_0] / [\rho_b g - (4\mu_w K_a/D)P_v] \quad \cdots(3.2.1.10)$$

$$[\rho_b g - (4\mu_w K_a/D)P_v] \exp[(4\mu_w K_a/D)h] = \rho_b g - (4\mu_w K_a/D)P_0 \quad \cdots(3.2.1.11)$$

$$\rho_b g - (4\mu_w K_a/D)P_v = [\rho_b g - (4\mu_w K_a/D)P_0] \exp[-(4\mu_w K_a/D)h] \quad \cdots(3.2.1.12)$$

$$-(4\mu_w K_a/D)P_v = \rho_b g \exp[-(4\mu_w K_a/D)h] - \rho_b g - (4\mu_w K_a/D)P_0 \exp[-(4\mu_w K_a/D)h] \quad \cdots(3.2.1.13)$$

$$P_v = [\rho_b g / (4\mu_w K_a/D)] [1 - \exp[-(4\mu_w K_a/D)h]] + P_0 \exp[-(4\mu_w K_a/D)h] \quad \cdots(3.2.1.14)$$

$$P_v = [\rho_b g D / (4\mu_w K_a)] [1 - \exp[-(4\mu_w K_a/D)h]] + P_0 \exp[-(4\mu_w K_a/D)h] \quad \cdots(3.2.1.15)$$

$$P_v = [\rho_b g (H/\eta) / (4\mu_w K_a)] [1 - \exp[-4\mu_w K_a \eta (h/H)]] + P_0 \exp[-4\mu_w K_a \eta (h/H)] \quad [\eta = H/D] \quad \cdots(3.2.1.16)$$

$$\frac{P_v}{\rho_b g H} = \frac{1}{4\mu_w K_a \eta} \left[1 - \exp\left(-4\mu_w K_a \eta \frac{h}{H}\right) \right] + \frac{P_0}{\rho_b g H} \exp\left(-4\mu_w K_a \eta \frac{h}{H}\right) \quad \cdots(3.2.1.17)$$

$$\frac{P_h}{\rho_b g H} = \frac{1}{4\mu_w \eta} \left[1 - \exp\left(-4\mu_w K_a \eta \frac{h}{H}\right) \right] + \frac{K_a P_0}{\rho_b g H} \exp\left(-4\mu_w K_a \eta \frac{h}{H}\right) \quad [P_h = K_a P_v] \quad \cdots(3.2.1.18)$$

$$\frac{P_w}{\rho_b g H} = \frac{1}{4\mu_w \eta} \left[1 - \exp\left(-4\mu_w K_a \eta \frac{h}{H}\right) \right] + \frac{K_a P_0}{\rho_b g H} \exp\left(-4\mu_w K_a \eta \frac{h}{H}\right) \quad [P_w (=P_h) = K_a P_v] \quad \cdots(3.2.1.19)$$

ただし、 K_a はランキン係数($=P_h/P_v=(1-\sin\phi)/(1+\sin\phi)$)、 ϕ は内部摩擦角[deg.]、 μ_w は壁摩擦係数($=\tan\phi_w$)。投入時の動的粉体圧は、圧力上昇係数 $C_i=1.0\sim 2.0$ (指定がない場合 1.5) を Janssen 式の静的 P_v 値に乘じる [文献 11-14]。排出時の動的粉体圧は、圧力上昇係数 C_d を Janssen 式の静的 P_h 値または静的 P_w 値に乘じる [文献 11-14]。いずれもランキン係数 K_a の代わりに動的ランキン係数 $K_w=(1-\sin\phi_w)/(1+\sin\phi_w)$ を用いる。

$$h/D \leq 1.0 \text{ のとき} \quad C_d = 1.0$$

$$1.0 < h/D < 1.5 \text{ のとき} \quad C_d = 1.0 + (0.7)[(h/D) - 1.0]$$

$$1.5 \leq h/D \text{ のとき} \quad C_d = 1.35$$

ただし、 D は貯槽径[m]、 h は貯蔵物の自由表面からの深さ[m]。

②浅槽 ($h/D \leq 1.5$) の場合 垂直圧については、水圧と同じ式を用いる。

$$P_v = \rho_b g h + P_0 \quad \cdots(3.2.1.20)$$

$$\frac{P_v}{\rho_b g H} = \frac{h}{H} + \frac{P_0}{\rho_b g H} \quad \cdots(3.2.1.21)$$

$$\frac{P_h}{\rho_b g H} = K_a \frac{h}{H} + \frac{K_a P_0}{\rho_b g H} \quad [P_h = K_a P_v] \quad \cdots(3.2.1.22)$$

$$\frac{P_w}{\rho_b g H} = K_a \frac{h}{H} + \frac{K_a P_0}{\rho_b g H} \quad [P_w (=P_h) = K_a P_v] \quad \cdots(3.2.1.23)$$

自由表面に作用する圧力 P_0 [Pa] は、外部から荷重がかけられていない限り 0 とする。

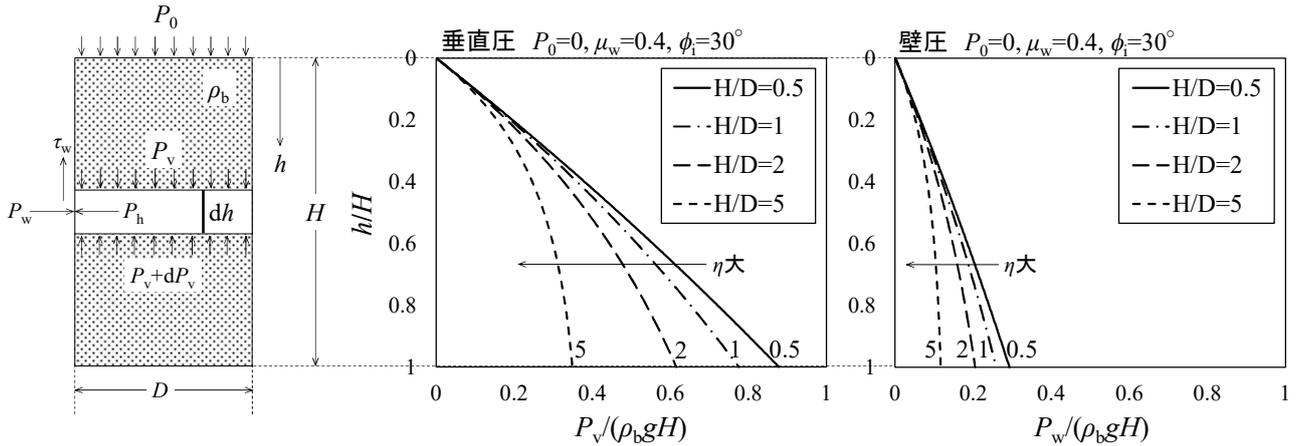


図 3.2.1.1 円筒貯槽内(深槽)における静的粉体圧分布の解析例

【計算例】円筒部粉体圧

かさ密度 800 kg/m^3 、壁摩擦係数 0.4 、内部摩擦角 30° の小麦を槽径 5.0 m の深槽型円筒サイロに貯蔵する場合の円筒部における深さ方向の静的壁圧分布を求めよ。ただし、重力加速度 9.81 m/s^2 、円筒部深さー槽径比 1 、貯蔵物は非付着性、貯蔵物の自由表面にかかる圧力は無視する。

$$K_a = (1 - \sin\phi) / (1 + \sin\phi) = (1 - \sin 30^\circ) / (1 + \sin 30^\circ) = 1/3$$

$$P_w = [\rho_b g D / (4\mu_w)] [1 - \exp\{- (4\mu_w K_a / D) h\}] = [(800)(9.81)(5.0) / \{(4)(0.4)\}] [1 - \exp\{- \{(4)(0.4)(1/3) / (5.0)\} h\}]$$

$$= (24525) [1 - \exp(-0.10666h)] \quad (P_0=0)$$

$h \text{ [m]}$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$P_w \text{ [kPa]}$	0	1.27	2.48	3.63	4.71	5.74	6.72	7.64	8.52	9.35	10.1

【問題】円筒部粉体圧

かさ密度 650 kg/m^3 、壁摩擦係数 0.3 、内部摩擦角 35° の大豆を槽径 8.0 m の深槽型円筒サイロに貯蔵する場合の円筒部における深さ方向の静的壁圧分布を求めよ。ただし、重力加速度 9.81 m/s^2 、円筒部深さー槽径比 1 、貯蔵物は非付着性、貯蔵物の自由表面にかかる圧力は無視する。

3.2.2 円錐部 [文献 15-20]

槽径 $D \text{ [m]}$ 、深さ $L \text{ [m]}$ 、頂角 $2\theta \text{ [rad]}$ の貯槽円錐部(断面積 $S \text{ [m}^2\text{]})$ にかさ密度 $\rho_b \text{ [kg/m}^3\text{]}$ の粉粒体が均一に充填されているものとする。貯槽底面から高さ $l \text{ [m]}$ の位置にある層高 $dl \text{ [m]}$ の微小粉体層(容積 $dV \text{ [m}^3\text{])}$ に作用する垂直圧を $P_v \text{ [Pa]}$ 、水平圧を $P_h \text{ [Pa]}$ 、壁摩擦力を $\tau_w \text{ [Pa]}$ 、反力を壁圧 $P_w \text{ [Pa]}$ とする。微小粉体層に対する垂直方向の力のつり合いは、次式のように導かれる。

$$(P_v + dP_v)(S + dS) + \rho_b g dV = P_v S + P_w dA \sin\theta + \tau_w dA \cos\theta \quad \cdots (3.2.2.1)$$

$$P_v(S + dS) + dP_v(S + dS) + \rho_b g dV = P_v S + P_w dA \sin\theta + \tau_w dA \cos\theta \quad \cdots (3.2.2.2)$$

$$P_v dS + S dP_v + \rho_b g [(S + dS)(l + dl)/3 - (Sl/3)] = P_w [2\pi r(dl/\cos\theta)] \sin\theta + \tau_w [2\pi r(dl/\cos\theta)] \cos\theta \quad [dP_v \cdot dS \doteq 0] \quad \cdots (3.2.2.3)$$

$$P_v [\pi(r + dr)^2 - \pi r^2] + \pi r^2 dP_v + \rho_b g [\pi(r + dr)^2(l + dl)/3 - (\pi r^2 l/3)] = P_w (2\pi r dl \tan\theta) + \tau_w (2\pi r dl) \quad \cdots (3.2.2.4)$$

$$P_v (2\pi r dr) + \pi r^2 dP_v + \rho_b g [(\pi r^2 + 2\pi r dr)(l + dl)/3 - (\pi r^2 l/3)] = P_w (2\pi r dl \tan\theta) + \tau_w (2\pi r dl) \quad [(dr)^2 \doteq 0] \quad \cdots (3.2.2.5)$$

$$P_v (2\pi r dr) + \pi r^2 dP_v + \rho_b g [(\pi r^2 l + \pi r^2 dl + 2\pi r l dr)/3 - (\pi r^2 l/3)] = P_w (2\pi r dl \tan\theta) + \tau_w (2\pi r dl) \quad [dr \cdot dl \doteq 0] \quad \cdots (3.2.2.6)$$

$$P_v [2\pi l (\tan\theta) dl (\tan\theta)] + \pi l (\tan\theta)^2 dP_v + \rho_b g [(1/3)\pi l (\tan\theta)^2 dl + (2/3)\pi l (\tan\theta) dl \tan\theta]$$

$$=P_w(2\pi(l\tan\theta)d/\tan\theta)+\tau_w(2\pi(l\tan\theta)dl) \quad [l=\tan\theta] \quad \cdots(3.2.2.7)$$

$$P_v(2\pi dl/\tan^2\theta)+(\pi l^2\tan^2\theta)dP_v+\rho_b g(\pi l^2 d/\tan^2\theta)=P_w(2\pi dl/\tan^2\theta)+\tau_w(2\pi dl/\tan\theta) \quad \cdots(3.2.2.8)$$

$$dP_v/dl+2P_v/l+\rho_b g=2P_w/l+2\mu_w P_w/(l\tan\theta) \quad [\tau_w=\mu_w P_w=P_w\tan\phi_w] \quad \cdots(3.2.2.9)$$

微小粉体層内では近似的に次式が成り立つものとする。

$$dP_v/dl+\rho_b g=2\mu_w P_w/(l\tan\theta) \quad [P_v\cong P_w] \quad \cdots(3.2.2.10)$$

ただし、 ϕ_w は壁摩擦角[deg.]、 μ_w は壁摩擦係数[-]($=\tan\phi_w$)。

壁圧 P_w [Pa]は、 P_w 方向の力のつり合いより次式のように導かれる。

$$P_w dA=P_h dA\cos^2\theta+(P_v+dP_v)dA\sin^2\theta \quad \cdots(3.2.2.11)$$

$$P_w dA=P_h dA\cos^2\theta+P_v dA\sin^2\theta \quad \cdots(3.2.2.12)$$

$$P_w=P_h\cos^2\theta+P_v\sin^2\theta \quad \cdots(3.2.2.13)$$

$$P_w=P_v(K_a\cos^2\theta+\sin^2\theta) \quad \cdots(3.2.2.14)$$

$$P_w=KP_v \quad [K=K_a\cos^2\theta+\sin^2\theta] \quad \cdots(3.2.2.15)$$

ただし、 K は壁圧-垂直圧比[-]、 K_a はランキン係数[-]($=P_h/P_v$)、 ϕ は内部摩擦角[deg.]。

上の微分方程式に代入すると、静的粉体圧分布の基本式が導かれる。

$$dP_v/dl+\rho_b g=2\mu_w KP_v/(l\tan\theta) \quad \cdots(3.2.2.16)$$

$$\boxed{dP_v/dl+\rho_b g=\alpha P_v/l} \quad [\alpha=2\mu_w K/\tan\theta=2\mu_w(K_a\cos^2\theta+\sin^2\theta)\cot\theta] \quad \cdots(3.2.2.17)$$

上式を解く。 $\alpha\neq 1$ のとき、 dP_v/dl が P_v/l と等しくなるような P_v を一般解の候補とする。

$$P_v=C_1 l^\alpha+C_2 l \quad (C_1 \text{ と } C_2 \text{ は定数}) \quad \cdots(3.2.2.18)$$

粉体層の上部に荷重が加わっているとき($l=L$ のとき $P_v=P_0$)の一般解は、次式となる。

$$P_0=C_1 L^\alpha+C_2 L \quad \cdots(3.2.2.19)$$

$$C_2=-C_1 L^{\alpha-1}+P_0 \quad \cdots(3.2.2.20)$$

$$P_v=C_1 l^\alpha-C_1 L^{\alpha-1}l+P_0 l \quad \cdots(3.2.2.21)$$

$$P_v=C_1 l(l^{\alpha-1}-L^{\alpha-1})+P_0 l \quad \cdots(3.2.2.22)$$

粉体圧分布の基本式に代入する。

$$d[C_1 l(l^{\alpha-1}-L^{\alpha-1})+P_0 l]/dl+\rho_b g=(\alpha/l)[C_1 l(l^{\alpha-1}-L^{\alpha-1})+P_0 l] \quad \cdots(3.2.2.23)$$

$$C_1(l^{\alpha-1}-L^{\alpha-1})+C_1(\alpha-1)l^{\alpha-1}+P_0+\rho_b g=C_1\alpha(l^{\alpha-1}-L^{\alpha-1})+P_0 \quad \cdots(3.2.2.24)$$

$$C_1 l^{\alpha-1}-C_1 L^{\alpha-1}+C_1\alpha l^{\alpha-1}-C_1 l^{\alpha-1}+\rho_b g=C_1\alpha l^{\alpha-1}-C_1\alpha L^{\alpha-1} \quad \cdots(3.2.2.25)$$

$$-C_1 L^{\alpha-1}+\rho_b g=-C_1\alpha L^{\alpha-1} \quad \cdots(3.2.2.26)$$

$$C_1=-\rho_b g/[(\alpha-1)L^{\alpha-1}] \quad \cdots(3.2.2.27)$$

$$C_2=-[-\rho_b g/(\alpha-1)L^{\alpha-1}]L^{\alpha-1}+P_0 \quad \cdots(3.2.2.28)$$

$$C_2=\rho_b g/(\alpha-1)+P_0 \quad \cdots(3.2.2.29)$$

一般解の式に代入すると、 $\alpha\neq 1$ のときの静的粉体圧分布式が導かれる。

$$P_v=-\rho_b g l^\alpha/[(\alpha-1)L^{\alpha-1}]+\rho_b g l/(\alpha-1)+P_0 \quad \cdots(3.2.2.30)$$

$$\boxed{P_v=[\rho_b g l/(\alpha-1)][1-(l/L)^{\alpha-1}]+P_0} \quad \cdots(3.2.2.31)$$

$$P_v=[\rho_b g L/(\alpha-1)](l/L)[1-(l/L)^{\alpha-1}]+P_0 \quad \cdots(3.2.2.32)$$

$$\boxed{\frac{P_v}{\rho_b g L}=\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{l}{L}-\left(\frac{l}{L}\right)^\alpha\right]+\frac{P_0}{\rho_b g L}} \quad (\alpha=2\mu_w K/\tan\theta) \quad \cdots(3.2.2.33)$$

$$\frac{P_h}{\rho_b g L} = \frac{K_a}{\alpha - 1} \left[(l/L) - (l/L)^\alpha \right] + \frac{K_a P_0}{\rho_b g L} \quad [P_h = K_a P_v, K_a = (1 - \sin \phi) / (1 + \sin \phi)] \quad \cdots (3.2.2.34)$$

$$\frac{P_w}{\rho_b g L} = \frac{K}{\alpha - 1} \left[(l/L) - (l/L)^\alpha \right] + \frac{K P_0}{\rho_b g L} \quad [P_w = K P_v, K = K_a \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] \quad \cdots (3.2.2.35)$$

$\alpha=1$ のとき、 dP_v/dl が P_v/l と等しくなるような P_v を一般解の候補とする。

$$P_v = C_1 l \ln l + C_2 l \quad \cdots (3.2.2.36)$$

粉体層の上部に荷重が加わっているとき ($l=L$ のとき $P_v=P_0$) の一般解は、次式となる。

$$P_0 = C_1 L \ln L + C_2 L \quad \cdots (3.2.2.37)$$

$$C_2 = -C_1 \ln L + (P_0/L) \quad \cdots (3.2.2.38)$$

$$P_v = C_1 l \ln l + [-C_1 \ln L + (P_0/L)] l \quad \cdots (3.2.2.39)$$

$$P_v = C_1 l (\ln l - \ln L) + (P_0/L) l \quad \cdots (3.2.2.40)$$

粉体圧分布の基本式に代入する。

$$d[C_1 l (\ln l - \ln L) + (P_0/L) l] / dl + \rho_b g = [C_1 l (\ln l - \ln L) + (P_0/L) l] / l \quad \cdots (3.2.2.41)$$

$$C_1 (\ln l - \ln L) + C_1 l (1/l) + (P_0/L) + \rho_b g = C_1 (\ln l - \ln L) + (P_0/L) \quad \cdots (3.2.2.42)$$

$$C_1 = -\rho_b g \quad \cdots (3.2.2.43)$$

$$C_2 = \rho_b g \ln L + (P_0/L) \quad \cdots (3.2.2.44)$$

一般解の式に代入すると、 $\alpha=1$ のときの静的粉体圧分布式が導かれる。

$$P_v = -\rho_b g l \ln l + [\rho_b g \ln L + (P_0/L)] l \quad \cdots (3.2.2.45)$$

$$P_v = -\rho_b g l \ln (l/L) + (P_0/L) l \quad \cdots (3.2.2.46)$$

$$P_v = -\rho_b g L (l/L) \ln (l/L) + (P_0/L) l \quad \cdots (3.2.2.47)$$

$$\frac{P_v}{\rho_b g L} = -(l/L) \ln (l/L) + \frac{P_0}{\rho_b g L} (l/L) \quad (\alpha=1) \quad \cdots (3.2.2.48)$$

$$\frac{P_h}{\rho_b g L} = -K_a (l/L) \ln (l/L) + \frac{K_a P_0}{\rho_b g L} (l/L) \quad [P_h = K_a P_v, K_a = (1 - \sin \phi) / (1 + \sin \phi)] \quad \cdots (3.2.2.49)$$

$$\frac{P_w}{\rho_b g L} = -K (l/L) \ln (l/L) + \frac{K P_0}{\rho_b g L} (l/L) \quad [P_w = K P_v, K = K_a \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] \quad \cdots (3.2.2.50)$$

排出時の動的粉体圧分布式は、次式を用いる **[文献 20]**。

$$\frac{P_v}{\rho_b g L} = \frac{1}{K_2 - 1} \left[(l/L) - (l/L)^{K_2} \right] + \frac{P_0}{\rho_b g L} \quad [K_2 = 2(K_3 - 1), K_3 = K_1 \{1 + (\tan \phi_w / \tan \theta)\}] \quad \cdots (3.2.2.51)$$

$$\frac{P_h}{\rho_b g L} = \frac{K_w}{K_2 - 1} \left[(l/L) - (l/L)^{K_2} \right] + \frac{K_w P_0}{\rho_b g L} \quad [P_h = K_w P_v, K_w = (1 - \sin \phi_w) / (1 + \sin \phi_w)] \quad \cdots (3.2.2.52)$$

$$\frac{P_w}{\rho_b g L} = \frac{K_1}{K_2 - 1} \left[(l/L) - (l/L)^{K_2} \right] + \frac{K_1 P_0}{\rho_b g L} \quad \cdots (3.2.2.53)$$

$$[P_w = K_1 P_v, K_1 = (1 + \sin \phi_e \cos 2\beta) / \{1 - \sin \phi_e \cos (2\theta + 2\beta)\}, 2\beta = \phi_w + \sin^{-1}(\sin \phi_w / \sin \phi_e)]$$

ただし、 β は円錐貯槽の傾斜壁と最大主応力面のなす角[deg.]、 ϕ_e は有効摩擦角[deg.] (非付着性粉体の場合は内部摩擦角 ϕ に等しい)、 ϕ_w は壁摩擦角[deg.]。

円筒部からの圧力 P_0 [Pa] は、次式で表される。

$$P_0 = \rho_b g H \quad \cdots (3.2.2.54)$$

ただし、 H は円筒部の自由表面から円錐部上底までの深さ[m]、 ρ_b は貯蔵物のかさ密度[kg/m³]。

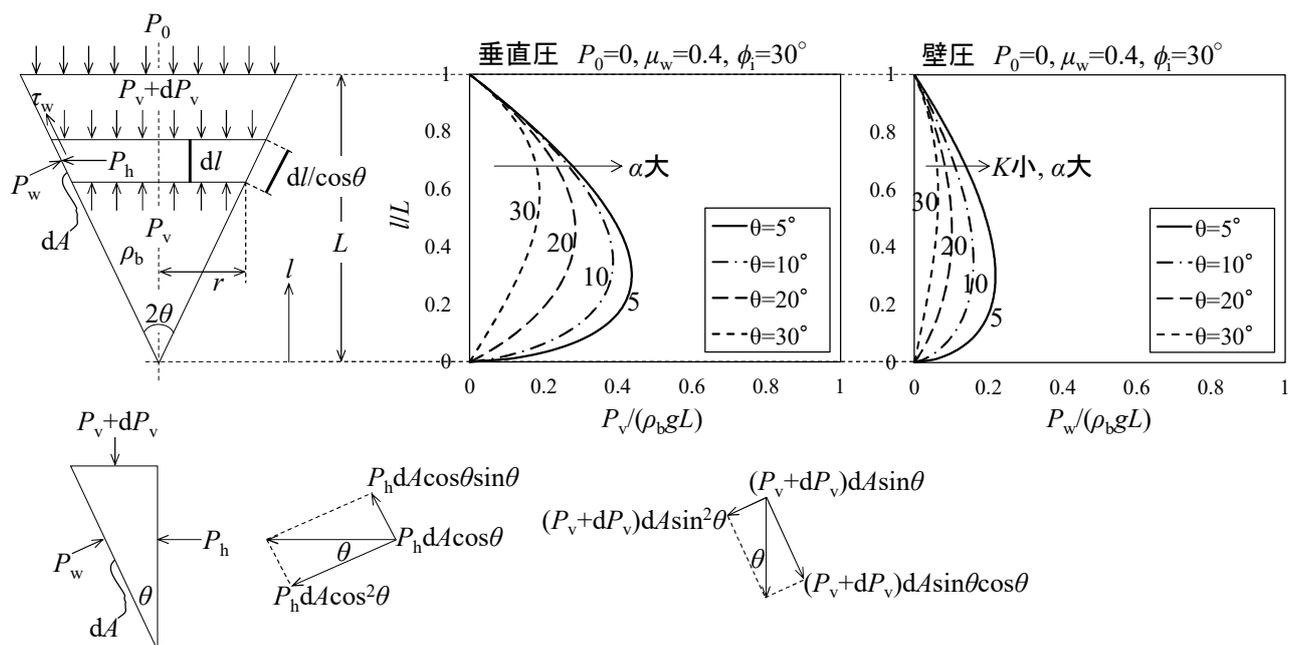


図 3. 2. 2. 1 円錐貯槽内における静的粉体圧分布の解析例

【計算例】円錐部粉体圧

かさ密度 800 kg/m³、壁摩擦係数 0.4、内部摩擦角 30°の小麦を槽径 5.0 m の深槽型円筒サイロに貯蔵する場合の円錐部における深さ方向の静的壁圧分布を求めよ。ただし、重力加速度 9.81 m/s²、円筒部深さー槽径比 1、円錐部深さー槽径比 1、排出角 25°、貯蔵物は非付着性とする。

$$K_a = (1 - \sin\phi) / (1 + \sin\phi) = (1 - \sin 30^\circ) / (1 + \sin 30^\circ) = 1/3$$

$$K = K_a \cos^2\theta + \sin^2\theta = (1/3) \cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ = 0.45240$$

$$\alpha = 2\mu_w K / \tan\theta = (2)(0.4)(0.45240) / (\tan 25^\circ) = 0.77613$$

$$H = (H/D)D = (1)(5.0) = 5.0 \text{ m}$$

$$P_0 = \rho_b g H = (800)(9.81)(5.0) = 39240 \text{ Pa} \approx 39.2 \text{ kPa}$$

$$L = (L/D)D = (1)(5.0) = 5.0 \text{ m}$$

$$P_w = [\rho_b g L K / (\alpha - 1)] [(l/L) - (l/L)^\alpha] + P_0 = [(800)(9.81)(5.0)(0.45240) / (0.77613 - 1)] [(l/5.0) - (l/5.0)^{0.77613}] + 39240$$

$$= (-79296) [(l/5.0) - (l/5.0)^{0.77613}] + 39240$$

l [m]	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
P_w [kPa]	39.2	44.6	46.1	46.6	46.5	45.9	45.0	43.9	42.5	40.9	39.2

【問題】円錐部粉体圧

かさ密度 650 kg/m³、壁摩擦係数 0.3、内部摩擦角 35°の大豆を槽径 8.0 m の深槽型円筒サイロに貯蔵する場合の円錐部における深さ方向の静的壁圧分布を求めよ。ただし、重力加速度 9.81 m/s²、円筒部深さー槽径比 1、円錐部深さー槽径比 1、排出角 25°、貯蔵物は非付着性とする。

3. 3 強度設計

3.3.1 薄肉円筒の板厚

板厚(いたあつ)が内径の 12%以下、あるいは外径の 10%以下の円筒を薄肉(うすにく)円筒という。いま、直径 D_T [mm]、高さ L_T [mm]、板厚 t_T [mm]の薄肉円筒に内圧 P_i [MPa]または[N/mm²]が作用するとき、円筒の壁内部には円筒を破断しようとする軸応力 σ_L [MPa]と円周応力(フープ応力ともいう) σ_θ [MPa]の 2 種類の引張応力が生じる。このとき、内圧 P_i が円筒断面に及ぼす力は、軸応力 σ_L が円筒壁面に対して垂直方向に及ぼす力とつり合っていることから、両者を等置して板厚 t_T [mm]が導かれる。

$$P_i \left(\frac{\pi D_T^2}{4} \right) = \sigma_L (\pi D_T t_T) \quad \cdots(3.3.1.1)$$

$$t_T = \frac{P_i D_T}{4 \sigma_L} \quad \cdots(3.3.1.2)$$

一方、内圧 P_i が円筒の投影面(投影面積 $D_T L_T$)に及ぼす力は、円周応力 σ_θ が円筒壁面に対して円周方向に及ぼす力とつり合っていることから、両者を等置して板厚 t_T [mm]が導かれる。

$$P_i D_T L_T = 2 \sigma_\theta L_T t_T \quad \cdots(3.3.1.3)$$

$$t_T = \frac{P_i D_T}{2 \sigma_\theta} \quad \cdots(3.3.1.4)$$

軸応力、円周応力ともに円筒を破断しようとする応力であることから、いずれか大きい方に合わせて板厚を計算すればよい。軸応力よりも常に大きい円周応力の式を用いる。

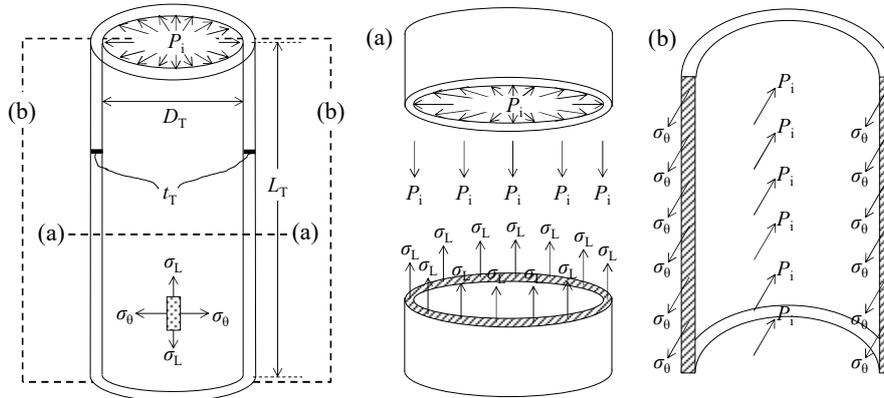


図 3.3.1.1 内圧を受ける薄肉円筒 [文献 21]

3.3.2 貯槽円筒部の板厚

貯槽円筒部の板厚 t_T [mm]は、次式で与えられる。

$$t_T = \frac{(P_{w,\max} + P_a) D}{2 \eta_e \sigma} \quad \cdots(3.3.2.1)$$

ただし、 D は貯槽径[mm]、 P_a は空気圧[N/mm²]、 $P_{w,\max}$ は貯蔵物から受ける壁圧の最大値[N/mm²]、 σ は貯槽材の許容応力[N/mm²](鉄鋼 100 N/mm², コンクリート 250 N/mm²)、 η_e は溶接継手効率[-]。

円筒部の最大静的粉体圧 P_{\max} [Pa]は、粉体圧分布式の深さ h を無限大に近づけることで導かれる。

$$P_{v,\max} = \rho_b g D / (4 \mu_w K_a) \quad \cdots(3.3.2.2)$$

$$P_{h,\max} = \rho_b g D / (4 \mu_w) \quad [P_h = K_a P_v] \quad \cdots(3.3.2.3)$$

$$P_{w,\max}=\rho_b g D/(4\mu_w) \quad [P_w(=P_h)=K_a P_v] \quad \cdots(3.3.2.4)$$

【計算例】貯槽円筒部の板厚

かさ密度 800 kg/m^3 、壁摩擦係数 0.4 の小麦を槽径 5.0 m の深槽型コンクリート製円筒サイロに貯蔵する場合の円筒部における①最大静的壁圧 $P_{w,\max}$ [kPa]と②槽壁の板厚 t_{Ta} [mm]を求めよ。ただし、実際の板厚は設計値を 10 倍した値を採用するものとし、重力加速度 9.81 m/s^2 、空気圧 100 kPa 、溶接接手効率 0.6 、貯蔵物は非付着性とする。（① 24.5 kPa 、② 20.8 mm ）

$$P_{w,\max}=\rho_b g D/(4\mu_w)=(800)(9.81)(5.0)/[(4)(0.4)]=24525 \text{ Pa} \doteq \boxed{24.5 \text{ kPa}}$$

$$t_{Ta}=10t_T=10(P_{w,\max}+P_a)D/(2\eta_c\sigma)$$

$$=(10)[(24525 \times 10^{-6})^{N/mm^2}+(100000 \times 10^{-6})^{N/mm^2}](5000)^{mm}/[(2)(0.6)(250)^{N/mm^2}]=20.754 \text{ mm} \doteq \boxed{20.8 \text{ mm}}$$

【問題】貯槽円筒部の板厚

かさ密度 650 kg/m^3 、壁摩擦係数 0.3 の大豆を槽径 8.0 m の深槽型コンクリート製円筒サイロに貯蔵する場合の円筒部における①最大静的壁圧 $P_{w,\max}$ [kPa]と②槽壁の板厚 t_{Ta} [mm]を求めよ。ただし、実際の板厚は設計値を 10 倍した値を採用するものとし、重力加速度 9.81 m/s^2 、空気圧 100 kPa 、溶接接手効率 0.6 、貯蔵物は非付着性とする。（① 42.5 kPa 、② 38.0 mm ）

3.3.3 貯槽円錐部の板厚

貯槽円錐部の板厚 t_T [mm]は、次式のうちいずれか大きい値を採用する。

$$\text{(母線方向)} \quad t_1 = \frac{T_1}{\eta_c \sigma} \quad \left[T_1 = \frac{P_a (\pi D^2 / 4) + (M + W_c) g}{\pi D \sin(90^\circ - \theta)} \right] \quad \cdots(3.3.3.1)$$

$$\text{(円錐方向)} \quad t_2 = \frac{T_2}{\eta_c \sigma} \quad \left[T_2 = \frac{(P_{w,\max} + P_a) D}{2 \sin(90^\circ - \theta)} \right] \quad \cdots(3.3.3.2)$$

ただし、 g は重力加速度[m/s²]、 M は貯蔵物重量[kg]、 T_1 は母線方向の張力[N/mm]、 T_2 は円錐方向の張力[N/mm]、 W_c は円錐部重量[kg]、 θ は円錐部の半頂角[deg.]。

実際の板厚 t_{Ta} は、安全のため計算値 t_T の $5 \sim 10$ 倍にする。

円錐部の最大静的粉体圧 P_{\max} [Pa]は、粉体圧分布式の極値を求めることで導かれる。

$$dP_v/dl=[\rho_b g L/(\alpha-1)][(1/L)-\alpha(l_m/L)^{\alpha-1}(1/L)]=0 \quad \cdots(3.3.3.3)$$

$$l_m=(L^{\alpha-1}/\alpha)^{1/(\alpha-1)} \quad [\alpha=2\mu_w K/\tan\theta, K=K_a \cos^2\theta+\sin^2\theta] \quad \cdots(3.3.3.4)$$

$$P_{v,\max}=[\rho_b g L/(\alpha-1)][(l_m/L)-(l_m/L)^\alpha]+P_0 \quad \cdots(3.3.3.5)$$

$$P_{h,\max}=[\rho_b g L K_a/(\alpha-1)][(l_m/L)-(l_m/L)^\alpha]+P_0 \quad [P_h=K_a P_v] \quad \cdots(3.3.3.6)$$

$$P_{w,\max}=[\rho_b g L K/(\alpha-1)][(l_m/L)-(l_m/L)^\alpha]+P_0 \quad [P_w=K P_v] \quad \cdots(3.3.3.7)$$

【計算例】貯槽円錐部の板厚

かさ密度 800 kg/m^3 、壁摩擦係数 0.4 、内部摩擦角 30° の小麦 200 t を槽径 5.0 m の深槽型コンクリート製円筒サイロに貯蔵する場合の円錐部における①最大静的壁圧 $P_{w,\max}$ [kPa]と②槽壁の板厚 t_{Ta} [mm]を求めよ。ただし、実際の板厚は設計値を 10 倍した値を採用するものとし、重力加速度 9.81 m/s^2 、空気圧 100 kPa 、溶接接手効率 0.6 、排出角 25° 、円錐部重量 30 t 、貯蔵物は非付着性とする。（① 46.6 kPa 、② 27.0 mm ）

$$K_a = (1 - \sin \phi) / (1 + \sin \phi) = (1 - \sin 30^\circ) / (1 + \sin 30^\circ) = 1/3$$

$$K = K_a \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = (1/3) \cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ = 0.45240$$

$$\alpha = 2\mu_w K / \tan \theta = (2)(0.4)(0.45240) / (\tan 25^\circ) = 0.77613$$

$$H = (H/D)D = (1)(5.0) = 5.0 \text{ m}$$

$$P_0 = \rho_b g H = (800)(9.81)(5.0) = 39240 \text{ Pa}$$

$$L = (L/D)D = (1)(5.0) = 5.0 \text{ m}$$

$$l_m = (L^{\alpha-1} / \alpha)^{1/(\alpha-1)} = (5.0^{0.77613-1} / 0.77613)^{1/(0.77613-1)} = 1.6118 \text{ m}$$

$$P_{w,\max} = [\rho_b g L K / (\alpha - 1)] [(l_m/L) - (l_m/L)^\alpha] + P_0$$

$$= [(800)(9.81)(5.0)(0.45240) / (0.77613 - 1)] [(1.6118/5.0) - (1.6118/5.0)^{0.77613}] + 39240 = 46613 \text{ Pa} \doteq \boxed{46.6 \text{ kPa}}$$

$$T_1 = [P_a (\pi D^2 / 4) + (M + W_c)g] / [\pi D \sin(90^\circ - \theta)]$$

$$= [(100000 \times 10^{-6}) \text{ N/mm}^2 [\pi (5000)^2 / 4] + (200000 + 30000)(9.81)] / [5000 \pi \sin(90^\circ - 25^\circ)] = 296.41 \text{ N/mm}$$

$$t_1 = T_1 / (\eta_e \sigma) = (296.41) / [(0.6)(250)] = 1.9760 \text{ mm}$$

$$T_2 = [(P_{w,\max} + P_a)D] / [2 \sin(90^\circ - \theta)] = [(46613 \times 10^{-6} + 100000 \times 10^{-6})(5000)] / [2 \sin(90^\circ - 25^\circ)] = 404.42 \text{ N/mm}$$

$$t_2 = T_2 / (\eta_e \sigma) = (404.42) / [(0.6)(250)] = 2.6961 \text{ mm} (> t_1)$$

$$t_{1a} = 10 t_1 = 10 t_2 = (10)(2.6961) = 26.961 \text{ mm} \doteq \boxed{27.0 \text{ mm}}$$

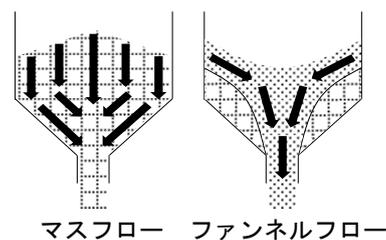
【問題】貯槽円錐部の板厚

かさ密度 650 kg/m^3 、壁摩擦係数 0.3 、内部摩擦角 35° の大豆 500 t を槽径 8.0 m の深槽型コンクリート製円筒サイロに貯蔵する場合の円錐部における①最大静的壁圧 $P_{w,\max}$ [kPa]と②槽壁の板厚 t_{1a} [mm]を求めよ。ただし、実際の板厚は設計値を 10 倍した値を採用するものとし、重力加速度 9.81 m/s^2 、空気圧 100 kPa 、溶接手効率 0.6 、排出角 25° 、円錐部重量 50 t 、貯蔵物は非付着性とする。(① 61.1 kPa , ② 47.4 mm)

3. 4 排出設計

3.4.1 最適排出角

貯槽円錐部からの排出機構(フローパターン)は、貯蔵物の堆積面が液面のように等しく沈下して貯蔵物の全体が排出されるマスフローと、傾斜壁近傍の貯蔵物が粉体圧による摩擦のために流動せず、中心部のみが流れて貯蔵物の一部が残留するファンネルフローに大別される。マスフローの条件を満たす円錐排出部の半頂角 θ [deg.]は、応力限界時のモール円を作図して次式のように導かれる。[文献 22, 23]



$$(\text{三角形 RST}) \quad \varphi = 180^\circ - 90^\circ - \left(45^\circ - \frac{\phi_1}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\phi_1}{2} \quad \cdots(3.4.1.1)$$

$$(\text{三角形 OXX}') \quad \theta = 180^\circ - 90^\circ - \varphi = 90^\circ - \left(45^\circ + \frac{\phi_1}{2}\right) = 45^\circ - \frac{\phi_1}{2} \quad \cdots(3.4.1.2)$$

この角度以下でマスフローとなる。より詳しくは、マスフローとファンネルフローの境界にあたる最適の排出角 θ_{opt} を与える Jenike の式がある(マスフロー設計)。[文献 24, 25]

$$\theta_{opt} = 90^\circ - \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1 - \sin \phi_e}{2 \sin \phi_e} \right) - \beta \quad \dots(3.4.1.3)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\phi_w + \sin^{-1} \left(\frac{\sin \phi_w}{\sin \phi_e} \right) \right] \quad \dots(3.4.1.4)$$

ただし、 β は円錐貯槽の傾斜壁と最大主応力面のなす角[deg.]、 ϕ_e は有効摩擦角[deg.] (非付着性粉体の場合は内部摩擦角 ϕ_i に等しい)、 ϕ_w は壁摩擦角[deg.]。

排出口付近の閉塞を防ぐには、円錐部の半頂角を鋭くして粉体の滑りを良好にする、排出口径を大きくとる、貯槽本体に衝撃(ノッカー)や振動(バイブレーター)を加える、内容物に空気を吹き込む、円錐部内に仕切板を取り付けて粉体圧を下げるなどが挙げられる [文献 26]。

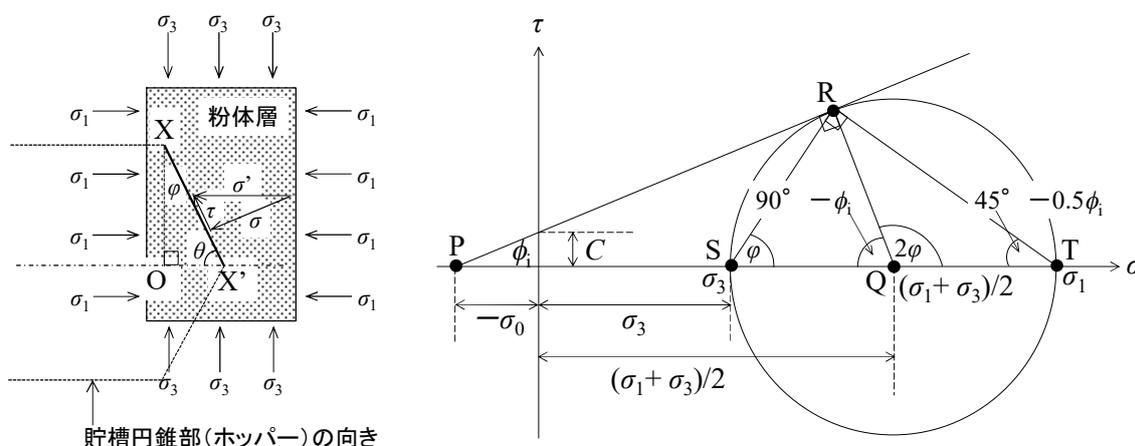


図 3.4.1.1 ホッパー角の解析 [文献 27, 28]

【計算例】最適排出角

壁摩擦係数 0.4、内部摩擦角 30°の小麦をホッパーに貯蔵する場合のマスフロー設計における最適排出角 θ_{opt} を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。(25.1°)

$$\phi_w = \tan^{-1} \mu_w = \tan^{-1} 0.4 = 21.801^\circ$$

$$\beta = (1/2) [\phi_w + \sin^{-1} (\sin \phi_w / \sin \phi_e)] = (1/2) [\phi_w + \sin^{-1} (\sin \phi_w / \sin \phi_i)] = (1/2) [21.801^\circ + \sin^{-1} (\sin 21.801^\circ / \sin 30^\circ)] = 34.884^\circ$$

$$\theta = 90^\circ - (1/2) \cos^{-1} [(1 - \sin \phi_e) / (2 \sin \phi_e)] - \beta = 90^\circ - (1/2) \cos^{-1} [(1 - \sin \phi_i) / (2 \sin \phi_i)] - \beta$$

$$= 90^\circ - (1/2) \cos^{-1} [(1 - \sin 30^\circ) / (2 \sin 30^\circ)] - 34.884^\circ = 25.116^\circ \approx \boxed{25.1^\circ}$$

【問題】最適排出角

壁摩擦係数 0.3、内部摩擦角 35°の大豆をホッパーに貯蔵する場合のマスフロー設計における最適排出角 θ_{opt} を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。(32.5°)

3.4.2 閉塞限界径

円錐部の排出口径 D_0 [m]は、粉体排出時に架橋(アーチ)が起こらない下限の口径(閉塞限界径) D_c [m]よりも大きくとる。非付着性粉体($C=0$)の場合は Langmaid & Rose の式 [文献 29]、付着性粉体($C \neq 0$)の場合は Gardner の式を用いる [文献 30-33]。

$$\text{(非付着性粉体)} \quad \frac{D_c}{D_{ps}} = 2.3 + 0.071\phi^{1.8} \quad \cdots(3.4.2.1)$$

$$\text{(付着性粉体)} \quad D_c = \frac{4C}{\rho_b}(1 + \sin \phi) \quad \cdots(3.4.2.3)$$

ただし、 D_{ps} は比表面積径[m]、 ϕ は比表面積形状係数[-] (= 表面積形状係数 ϕ_s ÷ 体積形状係数 ϕ_v)。

【計算例】閉塞限界径

比表面積径 1.00 mm の球状粒子に対するホッパー閉塞限界径 D_c [mm] を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。

(4.09 mm)

$$V_p = (4/3)\pi(D_p/2)^3 = (\pi/6)D_p^3$$

$$\phi_v = V_p/D_p^3 = (\pi/6)D_p^3/D_p^3 = \pi/6$$

$$S_p = 4\pi(D_p/2)^2 = \pi D_p^2$$

$$\phi_s = S_p/D_p^2 = \pi D_p^2/D_p^2 = \pi$$

$$\phi = \phi_s/\phi_v = \pi/(\pi/6) = 6$$

$$D_c/D_{ps} = 2.3 + 0.071\phi^{1.8} = 2.3 + (0.071)(6)^{1.8} = 4.0862$$

$$D_c = (D_c/D_{ps})D_{ps} = (4.0862)(1.00) = 4.0862 \text{ mm} \doteq \boxed{4.09 \text{ mm}}$$

【問題】閉塞限界径

比表面積径 1.00 mm の縦と横と高さの寸法比が 1 : 2 : 5 の直方体粒子に対するホッパー閉塞限界径 D_c [mm] を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。(2.94 mm)

3.4.3 排出時間

貯蔵物の排出時間 τ_d [s] は、次式で表される。

$$\tau_d = \frac{M}{W} \quad \cdots(3.4.3.1)$$

ただし、 M は貯蔵物の重量[kg]、 W は排出速度[kg/s]。

貯蔵円錐部からの排出速度式として、田中・川合の式がある【文献 34】。

$$D_p/D_0 < 0.1 \text{ のとき} \quad W = 0.18\sqrt{g}(\mu_i \tan \theta)^{-0.32} \rho_b D_p^{2.5} (D_p/D_0)^{-2.7} \quad \cdots(3.4.3.2)$$

$$0.1 < D_p/D_0 < 0.23 \text{ のとき} \quad W = 0.10\sqrt{g}(\mu_i \tan \theta)^{-0.32} \rho_b D_p^{2.5} (D_p/D_0)^{-3.0} \quad \cdots(3.4.3.3)$$

ただし、 D_0 は排出口径[m]、 D_p は粒子径[m]、 g は重力加速度[m/s²]、 W は排出速度[kg/s]、 θ は円錐部の半頂角[deg.]、 μ_i は内部摩擦係数[-]、 ρ_b はかさ密度[kg/m³]。原報では内部摩擦係数 μ_i を安息角 ϕ で与えている ($\mu_i = \tan \phi$)。また、推算式は cgs 単位系で与えているが、SI 単位系に換算しても同様の式になる。

【計算例】排出時間

かさ密度 650 kg/m³、粒子径 8.0 mm、内部摩擦角 35° の大豆 100 t が排出口径 400 mm、排出角 25° のホッパーから排出されるとき排出時間 τ_d [min] を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。(14.4 min)

$$\mu_i = \tan \phi_i = \tan 35^\circ = 0.70020$$

$$D_p/D_0 = 8.0/400 = 0.02 (< 0.1)$$

$$W = 0.18g^{0.5}(\mu_i \tan \theta)^{-0.32} \rho_b D_p^{2.5} (D_p/D_0)^{-2.7}$$

$$= (0.18)(9.81)^{0.5} [(0.70020) \tan 25^\circ]^{-0.32} (650)(8.0 \times 10^{-3})^{2.5} (0.02)^{-2.7} = 116.01 \text{ kg/s}$$

$$\tau_d = M/W = 100 \times 10^3 / 116.01 = 861.99 \text{ s} = 14.366 \text{ min} \doteq \boxed{14.4 \text{ min}}$$

【計算例】排出時間

- (1) かさ密度 650 kg/m³、粒子径 5.0 mm、内部摩擦角 35°の大豆 100 t が排出口径 400 mm、排出角 25°のホッパーから排出されるとき排出時間 τ_d [min] を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。(13.1 min)
- (2) かさ密度 650 kg/m³、粒子径 5.0 mm、内部摩擦角 35°の大豆 100 t が排出口径 200 mm、排出角 25°のホッパーから排出されるとき排出時間 τ_d [min] を求めよ。貯蔵物は非付着性とする。(85.0 min)

4. 設計計算

貯蔵物	小麦	貯槽材	コンクリート
平均粒子径(比表面積径)	3 mm	円錐部重量	30 t
比表面積形状係数	8	円筒部深さ-槽径比	2.62
かさ密度	0.8 t/m ³	排出角	マスフロー設計に基づく最適角
安息角	30°	排出口径-槽径比	1/10
内部摩擦角	30°	空気圧	100 kPa
壁摩擦係数	0.4	溶接接手効率	0.6
付着性	無し	板厚(円筒部・円錐部)	計算値の 10 倍
貯蔵量	300 t	重力加速度	9.81 m/s ²
貯槽型式	スカート型		

① 寸法設計

$$\phi_w = \tan^{-1} \mu_w = \tan^{-1} 0.4 = 21.801^\circ$$

$$\beta = (1/2)[\phi_w + \sin^{-1}(\sin \phi_w / \sin \phi_c)] = (1/2)[\phi_w + \sin^{-1}(\sin \phi_w / \sin \phi)] = (1/2)[21.801^\circ + \sin^{-1}(\sin 21.801^\circ / \sin 30^\circ)] = 34.884^\circ$$

$$\theta = 90^\circ - (1/2)\cos^{-1}[(1 - \sin \phi_c)/(2\sin \phi_c)] - \beta = 90^\circ - (1/2)\cos^{-1}[(1 - \sin \phi)/(2\sin \phi)] - \beta$$

$$= 90^\circ - (1/2)\cos^{-1}[(1 - \sin 30^\circ)/(2\sin 30^\circ)] - 34.884^\circ = 25.116^\circ \doteq \boxed{25.1^\circ}$$

$$V_b = M/\rho_b = 300/0.8 = 375 \text{ m}^3$$

$$V_T \doteq 1.1V_b = (1.1)(375) = \boxed{412.5 \text{ m}^3}$$

$$D = [(4V_b/\pi) / \{(H/D) + (1/6)\tan \theta\}]^{1/3} = [(4)(375/\pi) / \{(2.62) + (1/6)\tan 25.116^\circ\}]^{1/3} = 5.4340 \text{ m} \doteq \boxed{5.43 \text{ m}}$$

$$H = (H/D)D = (2.62)(5.4340) = 14.237 \text{ m} \doteq \boxed{14.2 \text{ m}}$$

$$L/D = 1/(2\tan \theta) = 0.5/\tan 25.116^\circ = 1.0666 \doteq 1.07$$

$$L = (L/D)D = (1.0666)(5.4340) = 5.7959 \text{ m} \doteq \boxed{5.80 \text{ m}}$$

$$D_0 = (D_0/D)D = (1/10)(5.4340) = 0.54340 \text{ m} \doteq \boxed{543 \text{ mm}}$$

② 静的壁圧分布

$$h/D=H/D+L/D=2.62+1.07=3.69 \text{ (深槽)}$$

$$\text{(円筒部)} K_a=(1-\sin\phi)/(1+\sin\phi)=(1-\sin30^\circ)/(1+\sin30^\circ)=1/3$$

$$P_w=[\rho_b g D/(4\mu_w)][1-\exp\{-(4\mu_w K_a/D)h\}]=[(800)(9.81)(5.4340)/\{(4)(0.4)\}][1-\exp\{-\{(4)(0.4)(1/3)/(5.4340)\}h\}]$$

$$=(26653)[1-\exp(-0.098147h)] \quad (P_0=0)$$

$$P_{w,\max}=\rho_b g D/(4\mu_w)=(800)(9.81)(5.4340)/\{(4)(0.4)\}=26.653 \text{ kPa} \doteq \boxed{26.6 \text{ kPa}}$$

h [m]	0	2	4	6	8	10	12	14	14.2	∞
P_w [kPa]	0.0	4.8	8.7	11.9	14.5	16.7	18.4	19.9	20.0	26.6

$$\text{(円錐部)} K=K_a \cos^2\theta + \sin^2\theta=(1/3)\cos^2 25.116^\circ + \sin^2 25.116^\circ=0.45343$$

$$\alpha=2\mu_w K/\tan\theta=(2)(0.4)(0.45343)/(\tan 25.116^\circ)=0.77381$$

$$P_0=\rho_b g H=(800)(9.81)(14.237)=111731 \text{ Pa} \doteq 112 \text{ kPa}$$

$$P_w=[\rho_b g L K/(\alpha-1)][(l/L)-(l/L)^\alpha]+P_0=[(800)(9.81)(5.8)(0.45343)/(0.77381-1)][(l/5.8)-(l/5.8)^{0.77381}]+111731$$

$$=(-91183)[(l/5.8)-(l/5.8)^{0.77381}]+111731$$

$$dP_w/dl=[\rho_b g L K/(\alpha-1)][(1/L)-\alpha(l/L)^{\alpha-1}(1/L)]=0$$

$$l_m=(L^{\alpha-1}/\alpha)^{1/(\alpha-1)}=(5.8^{0.77381-1}/0.77381)^{1/(0.77381-1)}=1.8666 \text{ m} \doteq 1.9 \text{ m}$$

$$P_{w,\max}=[\rho_b g L K/(\alpha-1)][(l_m/L)-(l_m/L)^\alpha]+P_0=(-91183)[(1.9/5.8)-(1.9/5.8)^{0.77381}]+111731=120308 \text{ Pa} \doteq \boxed{120 \text{ kPa}}$$

l [m]	0	1	2	3	4	5	5.8			
P_w [kPa]	120	128	129	128	126	123	120			

③ 強度設計

$$\text{(円筒部)} t_{T_a}=10t_T=10(P_{w,\max}+P_a)D/(2\eta_c\sigma)$$

$$=(10)[(26653 \times 10^{-6})^{\text{N/mm}^2}+(100000 \times 10^{-6})^{\text{N/mm}^2}](5434)^{\text{mm}}/[(2)(0.6)(250)^{\text{N/mm}^2}]=22.941 \text{ mm} \doteq \boxed{22.9 \text{ mm}}$$

$$\text{(円錐部)} T_1=[P_a(\pi D^2/4)+(M+W_c)g]/[\pi D \sin(90^\circ-\theta)]$$

$$=[(100000 \times 10^{-6})^{\text{N/mm}^2}[\pi(5434)^2/4]+(300000+30000)(9.81)]/[5434\pi \sin(90^\circ-25.116^\circ)]=359.47 \text{ N/mm}$$

$$t_1=T_1/(\eta_c\sigma)=(359.47)/[(0.6)(250)]=2.3964 \text{ mm}$$

$$T_2=[(P_{w,\max}+P_a)D]/[2\sin(90^\circ-\theta)]=[(120308 \times 10^{-6}+101325 \times 10^{-6})(5434)]/[2\sin(90^\circ-25.116^\circ)]=665.05 \text{ N/mm}$$

$$t_2=T_2/(\eta_c\sigma)=(665.05)/[(0.6)(250)]=4.4336 \text{ mm} (>t_1)$$

$$t_{T_a}=10t_T=10t_2=(10)(4.4336)=44.336 \text{ mm} \doteq \boxed{44.3 \text{ mm}}$$

④ 排出時間

$$D_c/D_{ps}=2.3+0.071\phi^{1.8}=2.3+(0.071)(8)^{1.8}=5.2979$$

$$D_c=(D_c/D_{ps})D_{ps}=(5.2979)(3)=15.893 \text{ mm} \doteq 15.9 \text{ mm}$$

$$D_0=(D_0/D)D=(1/10)(5434)=543.4 \text{ mm} \doteq 543 \text{ mm} (>D_c)$$

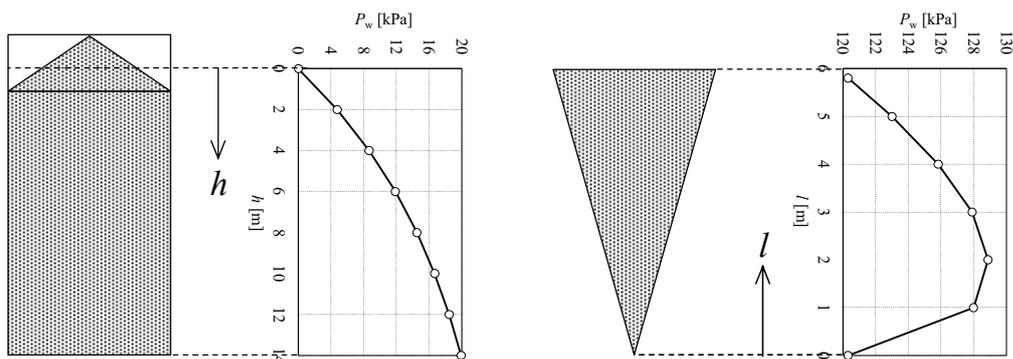
$$D_p/D_0=3/543.4=0.0055207$$

$$\mu_i=\tan\phi_i=\tan30^\circ=0.57735$$

$$W=0.18g^{0.5}(\mu_i \tan\theta)^{-0.32}\rho_b D_p^{2.5}(D_p/D_0)^{-2.7}$$

$$=(0.18)(9.81)^{0.5}[(0.57735)\tan 25.116^\circ]^{-0.32}(800)(0.003)^{2.5}(0.0055207)^{-2.7}=0.42193 \text{ t/s} \doteq 0.422 \text{ t/s}$$

$$t_d=M/W=300/0.42193=711.01 \text{ s}=11.850 \text{ min} \doteq \boxed{12 \text{ min}}$$



参考文献

- [1] A.W. Jenike, P.J. Elsey, R.H. Woolley; *Proc. ASTM*, **60** (1960) 1168-1181
- [2] R.L. Brown and J.C. Richards; *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, **37** (1959)108-116
- [3] Г.И. Покровский(ポクロフスキー); *Жур. Тех. Физ.*, **7** (1937)424-427
- [4] И.П. Линчевский(リンチェフスキー); *Жур. Тех. Физ.*, **9** (1939)343-347
- [5] R.L. Brown and J.C. Richards; *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, **37** (1959)108-116
- [6] 植松時雄(著), 化学工学協会(編); 化学機械技術, 第5集(1953) p.187
- [7] 藤田 重文, 東畑平一郎(編); 化学工学II 第2版「機械的操作」, 東京化学同人(1972) p.129-131
- [8] 今木 清康; 粉体工学演習, コロナ社(1987)p.81
- [9] 粉粒体供給装置委員会; 粉粒体の貯槽と供給装置, 日刊工業新聞社(1963), pp.96-99
- [10] H.A. Janssen; *V.D.I.-Zeit*, **39** (1895) 1045-1049
- [11] ISO/TC98/SC3/WG 委員会; 粉体と工業, **24** (1992) 78
- [12] ISO/TC98/SC3/WG 委員会; 粉体と工業, **25** (1993) 61
- [13] ISO/TC98/SC3/WG 委員会; 粉体と工業, **25** (1993) 57
- [14] 林 恒美; 粉体技術ポケットブック, 工業調査会(1996)pp.225-265
- [15] C.A. Lee; *Chem. Eng.*, **60** (1953) 194-195
- [16] C.A. Lee; *Chem. Eng.*, **60** (1953) 200
- [17] C.A. Lee; *Chem. Eng.*, **61** (1954) 181
- [18] A.W. Jenike; *Chem. Eng.*, **61** (1954) 175-180
- [19] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), pp.179-181
- [20] P.A. Shamlou; *Handling of Bulk Solids*, Butterworth (1988) pp.35-42
- [21] G. Towler, R. Sinnott; *Chemical Engineering Design 2nd Ed.*, Butterworth-Heinemann (2012), Chapter 14
Design of pressure vessels
- [22] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), pp.207
- [23] 三輪茂雄; 粉体工学通論, 日刊工業新聞社(1981), pp.126
- [24] A.W. Jenike; Bull. No.108, Uta Eng. Experimental Station, Salt Lake City (1961)
- [25] P.A. Shamlou; *Handling of Bulk Solids*, Butterworth (1988) p.60
- [26] 粉粒体供給装置委員会; 粉粒体の貯槽と供給装置, 日刊工業新聞社(1963), pp.53-69
- [27] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), p.164
- [28] 三輪茂雄; 粉体工学通論, 日刊工業新聞社(1981), p.110
- [29] R.N. Langmaid and H.E. Rose; *J. Inst. Fuel.*, **30** (1957)166
- [30] G.C. Gardner; *Chem. Eng. Sci.*, **17** (1962) 1079
- [31] G.C. Gardner; *Chem. Eng. Sci.*, **18** (1963) 35
- [32] G.C. Gardner; *Chem. Eng. Sci.*, **19** (1964) 283
- [33] 化学工学協会(編); 化学工学演習 1, 丸善(1969) p.168
- [34] 田中達夫, 川合清一; 化学工学, **20** (1956) 144-147

令和5年9月22日 作成

令和6年4月30日 改訂

粉体供給

1. 粉体供給装置

粉体供給装置は、貯槽内の粉粒体を所定量取り出して下流の工程へ送り出す装置であり、とりわけ定量性が重要となる。すなわち、定められた速度で供給・排出できること、壁面への付着による残留が少ないことが要求される。また、輸送中の粉粒体を分散させて粒子特性を均一化する役割もある。供給装置には、定量性と気密性に優れた振動式(振動フィーダー)、供給速度の調節が容易な回転運動式(スクリーフィーダー、ロータリーフィーダー、テーブルフィーダー)、岩石や鉱石など大型の塊状物に適したエンドレス式(ベルトフィーダー、エプロンフィーダー、チェーンフィーダー)や往復運動式(レシプロケーティングフィーダー)、微粉体の空気輸送に適した流動化式、単純な構造で密閉性の高い重力式(シュート)がある。

①**振動フィーダー** 粉粒体を載せたトラフを斜め方向に往復振動させる。定位置にあるトラフが斜め下方向へ引くと、トラフ上の粒子は宙に浮いて相対的にトラフの前方へ落下して前進する。また、定位置に戻ってきたトラフが斜め上方向へ移動して振幅の上端に到達すると、トラフ上の粒子は斜め上方向に投げ出されて前進する。これを繰り返すことで粒子が前方へと移動する。

②**ロータリーフィーダー** 羽根付きのローター(回転羽根)を円筒内で回転させ、上方から供給された粉粒体を羽根と羽根の間の空間に受けて下方へ排出する。定量性と気密性に優れている。

③**スクリーフィーダー** 断面形状が円またはU字をした本体内でらせん状のスクリーを水平方向に回転させ、粉粒体を前方へ押し出して供給する。供給速度の調節が容易。

④**ベルトフィーダー** 装置内をえんえんと循環する搬送体(ベルトなど)に粉粒体を積載して輸送する。粉粒体と搬送体の間に作用する摩擦のために粉粒体が前進する。大型化が容易であるため貯槽からの切り出しに用いられることが多い。密閉化が困難であるため微粉など飛散しやすいものは適さない。

⑤**レシプロケーティングフィーダー** 塊状の岩石や鉱石を載せた往復板を水平方向に往復運動させる。往復板が前進すると、供給物は板とともに前進する。往復板が後進すると、供給物は後方が詰まっているため後ろへ動けず、供給物からすっぽ抜けるようにして板のみが後進する。これを繰り返すことで供給物が前方へと移動する。

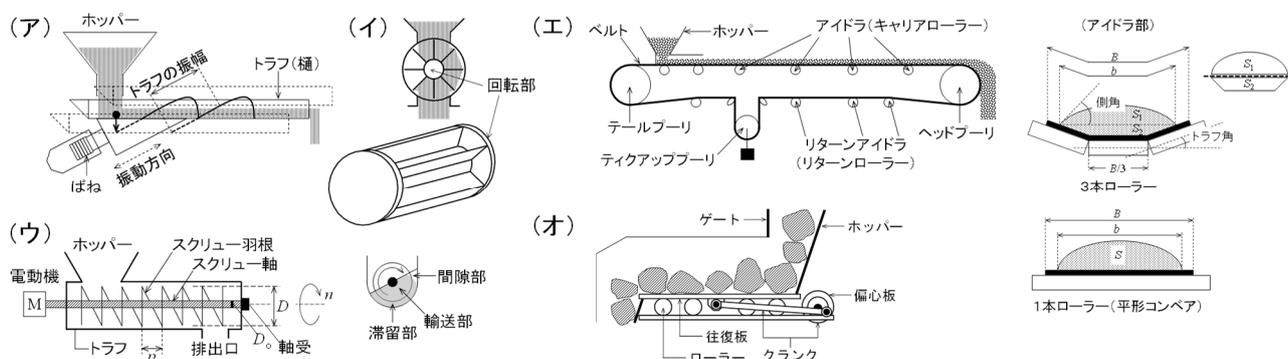


図 1.1 粉体供給装置の例

(ア) 振動フィーダー、(イ) ロータリーフィーダー、(ウ) スクリューフィーダー、(エ) ベルトフィーダー、(オ) レシプロケーティングフィーダー

2. 振動式供給装置

振動フィーダーの供給性能 Q [t/h] は、次式で与えられる。

$$Q=60B\delta u\rho_b C_1 C_2 C_3 \quad \cdots(2.1)$$

ただし、 B はトラフ幅[m]、 C_1 は粒子径に関する定数、 C_2 は粉粒体中の水分量に関する定数、 C_3 はトラフ傾斜角に関する定数、 u は供給速度[m/min]、 δ はトラフ上の供給物の積載高さ[m] (平均 $0.165B$)、 ρ_b は供給物のかさ密度[t/m³]。

供給速度 u [m/min] は、次式より求める。【文献 1】

$$u=60[ag\{K\sin\alpha-(K\sin\alpha)^{-1}\}]^{1/2}(\cos\alpha/\sin\alpha) \quad \cdots(2.2)$$

$$K(=a\omega^2/g)=4\pi^2 n^2 a/g \quad [\omega=2\pi n] \quad \cdots(2.3)$$

ただし、 a はトラフ半振幅[m]、 g は重力加速度[m/s²]、 K は振動強度[-] (遠心効果に相当)、 n はトラフ振動数[Hz]、 α は投射角 (振動方向に対するトラフ面の角度) [deg.]、 ω は角速度[rad/s]。

トラフ幅 B [mm] とトラフ長 L [mm] (供給距離に相当) は、 Q の式よりトラフ幅 B [mm] を求めてメーカーの標準仕様に近いもの (計算値よりもひとまわり大きいもの) を選定する。

$$B=Q/(60\delta u\rho_b C_1 C_2 C_3) \quad \cdots(2.4)$$

$$B^2=Q/[(60)(0.165)u\rho_b C_1 C_2 C_3] \quad [\delta=0.165B] \quad \cdots(2.5)$$

$$B=[Q/(9.9u\rho_b C_1 C_2 C_3)]^{0.5} \quad \cdots(2.6)$$

トラフ幅 B [mm] × トラフ長 L [mm] = 60×310, 100×500, 120×550, 150×610, 200×610, 310×762, 356×914, 458×914, 558×1067, 610×1067, 762×1219, 914×1524, 1372×1524, 1524×1829, 1829×1829 【文献 1】

表 2.1 定数 C_1 【文献 1, 2】

目開き [mesh]	200	100	60	40	30	20	10	5	2
粒子径 [mm]	0.08	0.15	0.25	0.43	0.6	0.85	2.00	4.00	10.5
C_1	0.4	0.5	0.7	0.8	0.9	1	1.2	1.2	1

表 2.2 定数 C_2 【文献 1-3】

水分含量 [%]		0	1	3	5	7	10	20
C_2	不溶性粉体*	1	0.8	1	0.95	0.9	0.8	0.55
	可溶性粉体**	1	0.8	0.85	0.8	0.7	0.6	0.3

*砂、石炭、コークスなど **塩、粘土、石膏など

表 2.3 定数 C_3 【文献 1-3】

トラフ傾斜角*	-10°	-5°	0°	5°	10°	15°
C_3	0.5	0.75	1.0	1.25	1.55	1.85

*正の場合、トラフの向きは斜め下向き。負の場合は斜め上向き。

【計算例】振動式供給装置

- (1) かさ密度 0.75 t/m^3 、粒子径 4.0 mm の小豆(水分含量 16% 、不溶性)をトラフ幅×トラフ長= $200 \text{ mm} \times 610 \text{ mm}$ の振動フィーダーで水平方向に供給する場合の処理性能 $Q \text{ [t/h]}$ を求めよ。トラフ全振幅 2.5 mm 、トラフ振動数 50 Hz 、投射角 30° 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。 (6.60 t/h)

$$a=0.0025/2=0.00125 \text{ mm}$$

$$K=a\omega^2/g=a(2\pi n)^2/g=4\pi^2 n^2 a/g=(4\pi^2)(50)^2(0.00125)/(9.81)=12.575$$

$$K\sin\alpha=12.575\sin30^\circ=6.2875$$

$$u=(60)[ag(K\sin\alpha - 1/K\sin\alpha)]^{0.5}(\cos\alpha/\sin\alpha)=(60)[(0.00125)(9.81)\{(6.2875 - (1/6.2875))\}]^{0.5}(\cos30^\circ/\sin30^\circ)$$

$$=28.488 \text{ m/min}$$

$$\delta \doteq 0.165B=(0.165)(200)=33.0 \text{ mm}$$

$$y=y_0+[(y_1-y_0)/(x_1-x_0)](x-x_0)$$

$$C_2=0.8+[(0.55-0.8)/(20-10)](16-10)=0.65 \text{ (直線補間)}$$

$$Q=60B\delta u\rho_b C_1 C_2 C_3=(60)(200 \times 10^{-3})(33.0 \times 10^{-3})(28.488)(0.75)(1.2)(0.65)(1.0)=6.5995 \text{ t/h} \doteq \boxed{6.60 \text{ t/h}}$$

- (2) かさ密度 1.7 t/m^3 、粒子径 0.85 mm の砂(水分含量 0% 、不溶性)を振動フィーダーで斜め下向き 5° の方向に 1 時間あたり 25 t 供給する場合のトラフ幅 $B \text{ [mm]}$ とトラフ長 $L \text{ [mm]}$ を求めよ。トラフ全振幅 2.5 mm 、トラフ振動数 60 Hz 、投射角 30° 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。 ($200 \text{ mm} \times 610 \text{ mm}$)

$$a=0.0025/2=0.00125 \text{ mm}$$

$$K=a\omega^2/g=a(2\pi n)^2/g=4\pi^2 n^2 a/g=(4\pi^2)(60)^2(0.00125)/(9.81)=18.109$$

$$K\sin\alpha=18.109\sin30^\circ=9.0545$$

$$u=(60)[ag(K\sin\alpha - 1/K\sin\alpha)]^{0.5}(\cos\alpha/\sin\alpha)=(60)[(0.00125)(9.81)\{(9.0545 - (1/9.0545))\}]^{0.5}(\cos30^\circ/\sin30^\circ)$$

$$=34.416 \text{ m/min}$$

$$B=[Q/(9.9u\rho_b C_1 C_2 C_3)]^{0.5}=[25/\{(9.9)(34.416)(1.7)(1)(1)(1.25)\}]^{0.5}=0.18582 \text{ m} \doteq 186 \text{ mm} \rightarrow \boxed{200 \text{ mm} \times 610 \text{ mm}}$$

【問題】 振動式供給装置

- (1) かさ密度 1.7 t/m^3 、粒子径 0.85 mm の砂(水分含量 0% 、不溶性)をトラフ幅×トラフ長= $100 \text{ mm} \times 500 \text{ mm}$ の振動フィーダーで斜め上向き 10° の方向に供給する場合の処理性能 $Q \text{ [t/h]}$ を求めよ。トラフ全振幅 2.5 mm 、トラフ振動数 60 Hz 、投射角 30° 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。 (2.90 t/h)
- (2) かさ密度 0.75 t/m^3 、粒子径 4.0 mm の小豆(水分含量 16% 、不溶性)を振動フィーダーで水平方向に 1 時間あたり 25 t 供給する場合のトラフ幅 $B \text{ [mm]}$ とトラフ長 $L \text{ [mm]}$ を求めよ。トラフ全振幅 2.5 mm 、トラフ振動数 50 Hz 、投射角 30° 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。 ($458 \text{ mm} \times 914 \text{ mm}$)

3. 回転落下式供給装置

①供給性能 ロータリーフィーダーの供給性能 $Q \text{ [t/h]}$ は、次式で与えられる。

$$Q=60qn\eta\rho_b \quad \cdots(3.1)$$

ただし、 n はローター回転速度[rpm]、 q はローター 1 回転あたりの供給量[m³]、 η は容積効率[-]、 ρ_b は供給物のかさ密度[t/m³]。

ローター 1 回転あたりの供給量 $q \text{ [m}^3\text{]}$ は、幾何学的に次式で表される。

$$q=(\pi/4)(D^2-D_0^2)L-Nt_R L \quad \cdots(3.2)$$

$$l=(D-D_0)/2 \quad \cdots(3.3)$$

ただし、 D はローター径[m]、 D_0 はローター軸径[m]、 L はローター長[m]、 l はローター翼幅[m]、 N はローター翼枚数[-]、 t_R はローター翼厚み[m]。

容積効率 η はローター回転速度の関数であり、実験的に求める必要がある。

ローターの寸法は、 Q の式より 1 回転あたりの供給量 q を求めてメーカーの標準仕様に近いものを選定する。

$$q=Q/(60n\eta\rho_b) \quad \cdots(3.4)$$

$$t_R=[(\pi/4)(D^2-D_0^2)L-q]/(NIL) \quad \cdots(3.5)$$

t_R 式中の q 値は、仕様上の値を用いる。

②臨界回転速度 ローター内の粉粒体には重力と遠心力が作用する。するには、遠心力よりも重力が大きいことが条件となる。ローターの質量 $[rps]$ は、両者が釣り合う条件で導かれる。【文献 4】

$$(\pi/6)D_p^3\rho_p g=(\pi/6)D_p^3\rho_p Z_c g \quad \cdots(3.6)$$

ただし、 D_p は粒子径[m]、 g は重力加速度[m/s²]、 Z_c は臨界遠心効果[-]、 ρ_p は粒子密度[kg/m³]

臨界遠心効果 Z_c は、次式のように導かれる。

$$Z_c(\equiv mr\omega^2/mg)=r\omega^2/g=(D/2)(2\pi n_c)^2/g=2\pi^2 n_c^2 D/g \quad \cdots(3.7)$$

上式に代入すると、臨界回転速度 n_c [rps] が導かれる。

$$2\pi^2 n_c^2 D/g=1 \quad \cdots(3.8)$$

$$n_c=(1/\pi)[g/(2D)]^{1/2} \quad \cdots(3.9)$$

この値よりも大きいと遠心力によって供給物が持ち上げられるため、排出が困難となる。実際のローター一回転速度 n は、20~40 rpm 程度が目安となる。

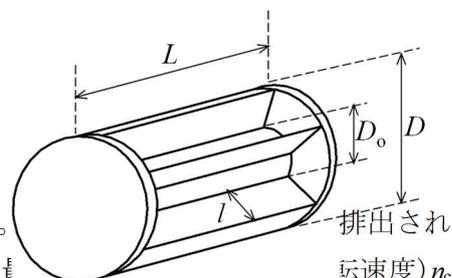


表 3.1 ローターフィーダーの標準仕様例【文献 5】

q [m ³]	D [mm]	D_0 [mm]	L [mm]	N
0.0035	210	30	150	6
0.0080	250	35	230	8
0.0140	300	40	260	8

【計算例】回転落下式供給装置

(1) かさ密度 0.7 t/m³ の粉炭をローター径 210 mm のローターフィーダーで供給する場合の処理性能 Q [t/h] を求めよ。ローター回転速度 30 rpm、容積効率 0.9、重力加速度 9.81 m/s² とする。(3.97 t/h)

$$Q=60q\eta\rho_b=(60)(0.0035)(30)(0.9)(0.7)=3.969 \text{ t/h} \approx 3.97 \text{ t/h}$$

(2) かさ密度 0.7 t/m³ の粉炭をローターフィーダーで 1 時間あたり 2.5 t 供給する場合のローター径 D [mm]、ローター軸径 D_0 [mm]、ローター長 L [mm]、ローター幅 l [mm]、ローター翼枚数 N [-]、ローター翼厚み t_R [mm]、臨界回転速度 n_c [rpm] を求めよ。ローター回転速度 20 rpm、容積効率 0.9、重力加速度 9.81 m/s² とする。($D=210$ mm, $D_0=30$ mm, $L=150$ mm, $N=6$, $l=90$ mm, $t_R=19.6$ mm, $n_c=92$ rpm)

$$q=Q/(60n\eta\rho_b)=2.5/[(60)(20)(0.9)(0.7)]=0.0033070 \text{ m}^3$$

$$q=0.0035 \text{ m}^3(\text{仕様値}), D=\boxed{210 \text{ mm}}, D_0=\boxed{30 \text{ mm}}, L=\boxed{150 \text{ mm}}, N=\boxed{6 \text{ 枚}}$$

$$l=(D-D_0)/2=(210-30)/2=\boxed{90 \text{ mm}}$$

$$t_R=[(\pi/4)(D^2-D_0^2)L-q]/(NIL)=[(\pi/4)(0.21^2-0.03^2)(0.15)-(0.0035)]/[(6)(0.090)(0.15)]=0.019621 \text{ m}$$

$$\doteq 19.6 \text{ mm}$$

$$n_c = (60/\pi)[g/(2D)]^{0.5} = (60/\pi)[(9.81/2)/(0.210)]^{0.5} = 92.302 \text{ rpm} \doteq 92 \text{ rpm} (>n)$$

【問題】 回転落下式供給装置

- (1) かさ密度 0.65 t/m^3 の大豆をローター径 250 mm のロータリーフィーダーで供給する場合の処理性能 Q [t/h] を求めよ。ローター回転速度 20 rpm 、容積効率 0.9 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(5.62 t/h)
- (2) かさ密度 0.65 t/m^3 の大豆をロータリーフィーダーで 1 時間あたり 10 t 供給する場合のローター径 D [mm]、ローター軸径 D_o [mm]、ローター長 L [mm]、ローター幅 l [mm]、ローター翼枚数 N [-]、ローター翼厚み t_R [mm]、臨界回転速度 n_c [rpm] を求めよ。ローター回転速度 40 rpm 、容積効率 0.9 、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。($D=250 \text{ mm}$, $D_o=35 \text{ mm}$, $L=230 \text{ mm}$, $N=8$, $l=108 \text{ mm}$, $t_R=15.5 \text{ mm}$, $n_c=84 \text{ rpm}$)

4. 回転運動式供給装置

①供給性能 スクリューフィーダーの供給性能 Q [t/h] は、次式で与えられる。

$$Q = 60 S u \rho_b \quad \dots(4.1)$$

ただし、 S は供給物の輸送部占有断面積[m²]、 u は供給速度[m/min]、 ρ_b は供給物のかさ密度[t/m³]。

供給物の輸送部占有断面積 S は、充填率 ϕ [-] の定義式(スクリュー断面積と輸送部における占有断面積の比)より導かれる。

$$\phi = S / [\pi(D^2 - D_o^2)/4] \quad \dots(4.2)$$

$$S = (\pi/4)(D^2 - D_o^2)\phi \quad \dots(4.3)$$

ただし、 D はスクリュー外径[m]、 D_o はスクリュー軸径[m]。

スクリュー外径 D は、供給物の粒子径をもとに標準仕様の表から選ぶ。粉粒体の粒子径や塊状物の割合が大きい場合は、スクリュー径を大きくとる。充填率 ϕ は、表より読み取る。

供給速度 u は、スクリューのピッチ p [m] と回転速度 n [rpm](=1/min) の積で表される。

$$u = pn \quad \dots(4.4)$$

安息角が大きく流動性が悪いもの、摩擦性があるもの、勾配がある場所で使用する場合は、スクリューのピッチ(らせんの山と山の間隔)を小さくして供給速度を小さくする。

②臨界回転速度 質量 m_p [kg] の単一固体粒子が有効半径 R [m] (=スクリュー半径 - 粒子半径 \doteq スクリュー半径) のスクリューの回転によって持ち上げられているとき、固体粒子にかかる遠心力と重力はつり合っている。

$$m_p u_p^2 / R = m_p g \cos\theta \quad \dots(4.5)$$

$$(R\omega)^2 / R = g \cos\theta \quad \dots(4.6)$$

$$R^2 [2\pi(n/60)]^2 / R = g \cos\theta \quad \dots(4.7)$$

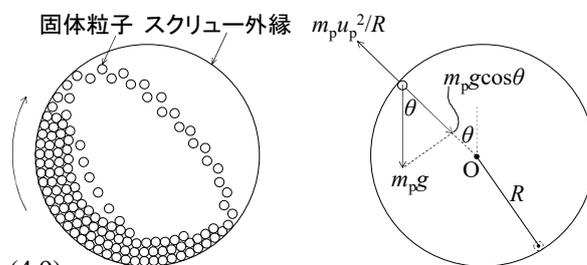
$$(2\pi/60)^2 R n^2 = g \cos\theta \quad \dots(4.8)$$

$$n = [g \cos\theta / \{(2\pi/60)^2 (D/2)\}]^{1/2} \quad [R = (D/2) - (D_p/2) \doteq D/2] \quad \dots(4.9)$$

$$n = 42.3 [(\cos\theta)/D]^{1/2} \quad \dots(4.10)$$

粒子がスクリューの頂点($\theta=90^\circ$)でスクリューから離れるときの回転速度が臨界回転速度 n_c [rpm] となる。

$$n_c = 42.3 / D^{1/2} \quad \dots(4.11)$$



この値よりも大きいと固体粒子はスクリーと一体となって回転するため、排出が困難となる。フィーダーとして用いる場合は 100 rpm 程度以下、コンベアとして用いる場合は 180 rpm 程度以下が目安となる。

[文献 6]

実際の回転速度 n [rpm] は、供給性能の式より求める。

$$Q=60Spn\rho_b \quad [u=pn] \quad \cdots(4.12)$$

$$n=Q/(60Sp\rho_b) \quad \cdots(4.13)$$

③供給所要動力 スクリューフィーダーの供給所要動力 P [kW] は、水平供給動力と垂直供給動力(下りの場合は負)の和で与えられる。 **[文献 3, 7, 8]**

$$P=(KQL\pm QH)/367 \quad \cdots(4.14)$$

ただし、 H は垂直揚程[m](上り下りの高さ。下りの場合は負)、 K は定数、 L はスクリー長さ [m](供給距離に相当)、 Q は供給性能[t/h]。 K 値は表より読み取る。

電動機動力 P_M [kW] は、次式で求める。

$$P_M=P/\eta_M \quad \cdots(4.15)$$

ただし、 η_M は電動機の機械効率[-](=0.7~0.8)。

電動機の定格出力を以下に示す。計算値よりもひとまわり大きい規格を選定する。 **[文献 9]**

0.2, 0.4, 0.75, 1.5, 2.2, 3.7, 5.5, 7.5, 11, 15, 18.5, 22, 30, 37, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 150, 200 kW

表 4.1 運搬物のかさ密度と充填率の関係(水平輸送の場合) **[文献 6, 10]**

運搬物の例	穀物	粉炭、豆類	石炭	セメント、砂利	鉱石
運搬物の嵩密度[t/m ³]	0.5~0.7	0.6~0.8	0.8~1.2	0.8~1.8	1.8~
運搬物の寸法	微粉	粉~粒	粒~小塊	塊状	塊状
運搬物の摩耗性	無し	無し~小	中	中~大	大
充填率(コンベア)	0.45	0.38	0.31	0.25	0.125
充填率(フィーダー)	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
K 値(動力推算式)	1.2	1.8	2.5	4	7

表 4.2 スクリューコンベア(またはフィーダー)の標準仕様例 **[文献 2, 11-13]**

運搬物の平均粒子径 D_p [mm]	10	18	25	35	45	50
運搬物の最大粒子径 $D_{p,max}$ [mm]	25	50	75	100	125	150
スクリー外径 D [mm]	100	200	300	400	500	600
スクリー軸径 D_o [mm]	35	55	70	80	90	100
ピッチ p [mm](コンベア)	80	150	210	280	340	400
ピッチ p [mm](フィーダー)	50	100	150	200	250	300

【計算例】回転運動式供給装置

(1) かさ密度 0.65 t/m³、粒子径 7 mm の大豆をスクリーフィーダーで供給する場合の処理性能 Q [t/h] を求めよ。スクリー回転速度 30 rpm とする。(0.322 t/h)

$$S=(\pi/4)(D^2-D_o^2)\phi=(\pi/4)(0.100^2-0.035^2)(0.8)=0.0055134 \text{ m}^2$$

$$u=pn=(0.050)(30)=1.5 \text{ m/min}$$

$$Q=60Su\rho_b=(60)(0.0055134)(1.5)(0.65)=0.32253 \text{ t/h} \doteq \boxed{0.322 \text{ t/h}}$$

- (2) かさ密度 1.5 t/m^3 、粒子径 25 mm の砂利をスクリーフィーダーで 1 時間あたり 20 t 、水平方向に 5.0 m 供給する場合の①スクリー外径 D [mm]、②スクリー軸径 D_o [mm]、③ピッチ p [mm]、④スクリー回転速度 n [rpm]、⑤臨界回転速度 n_c [rpm]、⑥供給所要動力 P [kW]、⑦電動機の定格出力 P_M [kW]を求めよ。電動機効率 0.7 とする。(① 300 mm , ② 70 mm , ③ 150 mm , ④ 28 rpm , ⑤ 77 rpm , ⑥ 1.09 kW , ⑦ 2.2 kW)

$$D=300 \text{ mm}, D_o=70 \text{ mm}, p=150 \text{ mm}, \phi=0.8$$

$$S=(\pi/4)(D^2-D_o^2)\phi=(\pi/4)[(0.300)^2-(0.07)^2](0.8)=0.053469 \text{ m}^2$$

$$n=Q/(60S\rho_b)=20/[(60)(0.053469)(0.150)(1.5)]=27.707 \approx 28 \text{ rpm}$$

$$n_c=42.3/D^{0.5}=42.3/(0.300)^{0.5}=77.228 \text{ rpm} \approx 77 \text{ rpm} (>n)$$

$$P=(KQL\pm QH)/367=[(4)(20)(5)\pm(20)(0)]/367=1.0899 \text{ kW} \approx 1.09 \text{ kW}$$

$$P_M=P/\eta_M=1.0899/0.7=1.5570 \text{ kW} \approx 1.56 \text{ kW} \rightarrow 2.2 \text{ kW}$$

【問題】回転運動式供給装置

- (1) かさ密度 1.5 t/m^3 、粒子径 25 mm の砂利をスクリーフィーダーで供給する場合の処理性能 Q [t/h] を求めよ。スクリー回転速度 30 rpm とする。(21.7 t/h)
- (2) かさ密度 1.0 t/m^3 、粒子径 35 mm の石炭をスクリーフィーダーで 1 時間あたり 50 t 、上り方向に 10 m (揚程 2.0 m) 供給する場合の①スクリー外径 D [mm]、②スクリー軸径 D_o [mm]、③ピッチ p [mm]、④スクリー回転速度 n [rpm]、⑤臨界回転速度 n_c [rpm]、⑥供給所要動力 P [kW]、⑦電動機の定格出力 P_M [kW]を求めよ。電動機効率 0.7 とする。(① 400 mm , ② 80 mm , ③ 200 mm , ④ 43 rpm , ⑤ 67 rpm , ⑥ 3.68 kW , ⑦ 5.5 kW)

5. エンドレス式供給装置

①供給性能 ベルトフィーダーの供給性能 Q [t/h]は、次式で与えられる。

$$Q=60S\rho_b \quad \cdots(5.1)$$

$$S=K(0.9B-0.05)^2 \quad \cdots(5.2)$$

ただし、 B はベルト幅[m]、 K は定数、 S は供給物の積載断面積[m²]、 u はベルト速度[m/min]、 ρ_b は供給物のかさ密度[t/m³]。

ベルト幅 B とベルト速度 u は、所定の供給性能 Q を満たす組み合わせを表より選ぶ。 S の式を Q の式に代入して u の式を導く。

$$Q=60K(0.9B-0.05)^2u\rho_b \quad \cdots(5.3)$$

$$u=Q/[60K(0.9B-0.05)^2\rho_b] \quad \cdots(5.4)$$

上式に適当なベルト幅 B を試行錯誤的に代入して、標準仕様の表の最大ベルト速度になるべく近くなるようなベルト速度 u を見つける。

②供給所要動力 ベルトフィーダーの供給所要動力 P [kW]は、無積載時動力 P_1 [kW]と水平供給時動力 P_2 [kW]と垂直供給時動力 P_3 [kW](下りの場合は負)と自走式トリッパ(コンベアの間で運搬物を降ろす装置。コンベアのみにも適用)運転時動力 P_t [kW]の和で求める。

$$P=P_1+P_2\pm P_3+P_t \quad \cdots(5.5)$$

無積載時動力 P_1 [kW]は、次式で与えられる。

$$P_1=0.06fwu(L+L_0)/367 \quad \cdots(5.6)$$

ただし、 f はローラーの回転摩擦係数[-](標準値 0.03)、 L はベルト長さ[m](供給距離に相当)、 L_0 はベルト長さの補正值[m](標準値 49 m)、 u はベルト速度[m/min]、 w は供給物以外のベルト長さあたり運動部分重量[kg/m]。

式中の 0.06 は、ベルト速度の単位を[m/min]から[m/h]に換算する分(=60 min/h)と動力の単位を[W]から[kW]に換算する分(=10⁻³ kW/W)に相当する。式中の 367 は、力と速度の積 $w(L+L_0)^{kgf} \times (60u)^{m/h}$ で表される動力の工学単位[kgf・m/h]から SI 単位[N・m/s]に換算する分(=(9.8)^{N/kgf}(1/3600)^{h/s} ≒ 1/367)に相当する。

水平供給時動力 P_2 [kW]は、次式で与えられる。

$$P_2=fQ(L+L_0)/367 \quad \cdots(5.7)$$

ただし、 Q は供給性能[t/h]。

垂直供給時動力 P_3 [kW]は、次式で与えられる。

$$P_3=HQ/367 \quad \cdots(5.8)$$

ただし、 H は垂直揚程[m](上り下りの高さ。下りの場合は負)。

自走式トリップ運転時動力 P_1 [kW]は、表より読み取る(ベルトコンベア)。

電動機動力 P_M [kW]は、次式で求める。

$$P_M=P/\eta_M \quad \cdots(5.9)$$

ただし、 η_M は電動機の機械効率[-](=0.75~0.85)。

電動機の定格出力を以下に示す。計算値よりもひとまわり大きい規格を選定する。[文献 9]

0.2, 0.4, 0.75, 1.5, 2.2, 3.7, 5.5, 7.5, 11, 15, 18.5, 22, 30, 37, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 150, 200 kW

表 5.1 ベルト幅と最大ベルト速度の関係(ベルトコンベア) [文献 14-16]

ベルト幅 [mm]	最大ベルト速度[m/min]								
	石炭 (大)*	石炭 (小)**	鉱石 (大)*	鉱石 (小)**	砂利 (大)*	砂利 (小)**	砂	木材 チップ	穀物
400	90	90	75	90	75	90	90	135	135
450	120	120	90	120	90	120	120	135	135
500	120	120	105	120	105	120	120	150	150
600	135	150	120	150	120	150	150	180	180
750	150	180	135	180	135	180	180	210	210
900	170	195	150	195	150	195	195	240	240
1050	180	210	150	195	150	195	210	240	240
1200	180	210	165	195	165	195	210	240	240
1400	195	210	165	195	165	195	210	240	240
嵩密度***	約 0.75		約 2.3		約 1.8		約 1.7	約 0.24	約 0.75
側角***	約 19°		約 19°		約 19°		約 20°	約 27°	約 12°

*75 mm 以上, **75 mm 未満, ***乾燥状態や含有成分等によって変動する。

フィーダーとして用いる場合は、最大ベルト速度 30 m/min 以下が目安となる。

ここでは便宜上、上の表を 1/8 倍した値を用いる。

表 5.2 積載断面積 S 式の K 値 [文献 14-16]

トラフ角度	運搬物側角		
	10°	20°	30°
0°	0.0295	0.0591	0.0906

20°	0.0963	0.1245	0.1535
30°	0.1232	0.1488	0.1754
45°	0.1484	0.1698	0.1915

表 5.3 運搬物以外の運動部分の仮定重量 [文献 14-16]

ベルト幅[mm]	400	450	500	600	750	900	1050	1200
運動部分の仮定重量[kg/m]	24.0	28.3	31.3	37.3	50.7	65.7	74.3	88.0

表 5.4 自走式トリッパ運転時動力(ベルトコンベア) [文献 14-16]

ベルト幅[mm]	400	450	500	600	750	900	1050	1200
トリッパ運転時動力[kW]	1.50	1.50	1.50	1.50	2.65	2.65	3.55	3.55

【計算例】エンドレス式供給装置

- (1) かさ密度 2.3 t/m^3 、粒子径 50 mm の鉱石を幅 500 mm のベルトフィーダーで供給する場合の処理性能 $Q \text{ [t/h]}$ を求めよ。ベルト速度は最大速度の $1/8$ 倍、トラフ角度 20° とする。 (41.2 t/h)

$$S=K(0.9B-0.05)^2=(0.1245)[(0.9)(0.500)-0.05]^2=0.01992 \text{ m}^2$$

$$Q=60S\rho_b v=(60)(0.01992)(120/8)(2.3)=41.234 \text{ t/h} \approx \boxed{41.2 \text{ t/h}}$$

- (2) かさ密度 2.3 t/m^3 、粒子径 50 mm の鉱石をベルトフィーダーで 1 時間あたり 20 t 、水平方向に 5.0 m 供給する場合の①ベルト幅 $B \text{ [mm]}$ 、②ベルト速度 $u \text{ [m/min]}$ 、③供給所要動力 $P \text{ [kW]}$ 、④電動機の定格出力 $P_M \text{ [kW]}$ を求めよ。キャリアローラー数 3、トラフ角度 20° 、トリッパ無し、電動機効率 0.8 とする。 (① 400 mm , ② 12.1 m/min , ③ 0.165 kW , ④ 0.4 kW)

$$B=\boxed{400 \text{ mm}}$$

$$S=K(0.9B-0.05)^2=(0.1245)[(0.9)(0.400)-0.05]^2=0.011964 \text{ m}^2$$

$$u=Q/(60S\rho_b)=20/[(60)(0.011964)(2.3)]=12.113 \text{ m/min} \approx \boxed{12.1 \text{ m/min}} (<v_{\max}/8)$$

$$(L+L_0)/367=(5.0+49)/367=0.14713$$

$$P_1=0.06fwu[(L+L_0)/367]=(0.06)(0.03)(24.0)(12.113)(0.14713)=0.076990 \text{ kW}$$

$$P_2=fQ[(L+L_0)/367]=(0.03)(20)(0.14713)=0.088278 \text{ kW}, P_3=0 \text{ kW}, P_t=0 \text{ kW}$$

$$P=P_1+P_2+P_3+P_t=0.076990+0.088278+0+0=0.16526 \text{ kW} \approx \boxed{0.165 \text{ kW}}$$

$$P_M=P/\eta_M=0.16526/0.8=0.20657 \text{ kW} \rightarrow \boxed{0.4 \text{ kW}}$$

【問題】エンドレス式供給装置

- (1) かさ密度 0.75 t/m^3 の穀物を幅 400 mm のベルトフィーダーで供給する場合の処理性能 $Q \text{ [t/h]}$ を求めよ。ベルト速度は最大速度の $1/8$ 倍、トラフ角度 20° とする。 (7.03 t/h)
- (2) かさ密度 0.75 t/m^3 の穀物をベルトフィーダーで 1 時間あたり 20 t 、上り方向に 10 m (揚程 2.0 m) 供給する場合の①ベルト幅 $B \text{ [mm]}$ 、②ベルト速度 $v \text{ [m/min]}$ 、③供給所要動力 $P \text{ [kW]}$ 、④電動機の定格出力 $P_M \text{ [kW]}$ を求めよ。キャリアローラー数 3、トラフ角度 20° 、トリッパ無し、電動機効率 0.8 とする。 (① 900 mm , ② 8.00 m/min , ③ 0.357 kW , ④ 0.75 kW)

6. 往復運動式供給装置

レシプロケーティングフィーダーの供給性能 Q [t/h]は、次式で与えられる。

$$Q=60BHSn\rho_b\phi \quad \cdots(6.1)$$

ただし、 B は往復板の幅[m]、 H はゲート開度[m](積載高さを調節)、 S は往復板のストローク長[m]、 n は偏心板の回転速度[rpm](20~30 rpm 程度)、 ϕ はスカートプレート高さ と積載高さの比[-](一般に 0.7~1.0)、 ρ_b は供給物のかさ密度[t/m³]。

供給装置の各寸法は、目的の供給量 Q [t/h]がメーカーの標準仕様から求められる供給性能 Q [t/h]と近くなるものを選定する。

表 6.1 レシプロケーティングフィーダーの標準仕様例 [文献 17]

往復板幅 B [mm]	往復板長さ L [mm]	ゲート開度 H [mm]	ストローク長 S [mm]
1200	4000	600	160
1500	5000	750	170
1650	5500	800	180
1800	5500	900	180

【計算例】往復運動式供給装置

- (1) かさ密度 1.0 t/m³ の石炭を往復板幅 1200 mm のレシプロケーティングフィーダーで供給する場合の処理性能 Q [t/h]を求めよ。偏心板の回転速度 25 rpm、 ϕ 値 0.7 とする。(121 t/h)

$$Q=60BHSn\rho_b\phi=(60)(1.20)(0.600)(0.160)(25)(1.0)(0.7)=120.96 \text{ t/h} \approx \boxed{121 \text{ t/h}}$$

- (2) かさ密度 2.3 t/m³ の鉱石をレシプロケーティングフィーダーで 1 時間あたり 300 t 供給する場合の①往復板幅 B [mm]、②往復板長さ L [mm]、③ゲート開度 H [mm]、④ストローク長 S [mm]を求めよ。偏心板の回転速度 20 rpm、 ϕ 値 0.7 とする。(① $B=1500$ mm, ② $L=5000$ mm, ③ $H=800$ mm, ④ $S=170$ mm)

$$B=\boxed{1500 \text{ mm}}, L=\boxed{5000 \text{ mm}}, H=\boxed{800 \text{ mm}}, S=\boxed{170 \text{ mm}}$$

$$Q=60BHSn\rho_b\phi=(60)(1.50)(0.800)(0.170)(20)(2.3)(0.7)=394.12 \text{ t/h} \approx 394 \text{ t/h} (>300 \text{ t/h})$$

【問題】往復運動式供給装置

- (1) かさ密度 2.3 t/m³ の鉱石を往復板幅 1800 mm のレシプロケーティングフィーダーで供給する場合の処理性能 Q [t/h]を求めよ。偏心板の回転速度 20 rpm、 ϕ 値 0.7 とする。(563 t/h)
- (2) かさ密度 1.0 t/m³ の石炭をレシプロケーティングフィーダーで 1 時間あたり 200 t 供給する場合の①往復板幅 B [mm]、②往復板長さ L [mm]、③ゲート開度 H [mm]、④ストローク長 S [mm]を求めよ。偏心板の回転速度 30 rpm、 ϕ 値 0.7 とする。(① $B=1200$ mm, ② $L=4000$ mm, ③ $H=600$ mm, ④ $S=160$ mm)

参考文献

[1] 日本粉体工業技術協会編; 粉粒体のバルクハンドリング技術, 日刊工業新聞社(1985)pp.221-226
 [2] 林 恒美; 粉体技術ポケットブック, 工業調査会(1996)8.1 章
 [3] 狩野 武; 粉体輸送技術, 日刊工業新聞社(1991)p.183
 [4] 狩野 武; 粉体輸送技術, 日刊工業新聞社(1991)p.149
 [5] 柴田 力; 粉粒体精密供給技術, アイシーピー(1986)p.231
 [6] 柴田 力; 粉粒体精密供給技術, アイシーピー(1986)3.5 章
 [7] 真島卯太郎; コンベヤ計算法, 工学図書(1970)15 章

- [8] 坂下 攝; 粉体プロセス設計 月刊「化学装置」別冊, 工業調査会(1999)pp.148-149
- [9] 狩野 武; 粉体輸送装置, 日刊工業新聞社(1969)p.148
- [10] 日本粉体工業技術協会編; 粉粒体のバルクハンドリング技術, 日刊工業新聞社(1985) p.238
- [11] 狩野 武; 粉体輸送技術, 日刊工業新聞社(1991)p.169
- [12] 真島卯太郎; コンベヤ計算法, 工学図書(1970)p.302
- [13] 国行一郎(編); 荷役機械工学便覧 改訂3版, コロナ社(1970)pp.229-232
- [14] JIS B 8805-1992
- [15] 小玉正雄, 石川義雄; 機械設計法, 産業図書(1964)6.5章 p.210
- [16] 林 恒美; 粉体技術ポケットブック, 工業調査会(1996)9.1章
- [17] 柴田 力; 粉粒体精密供給技術, アイシーピー(1986)p.76

令和5年10月3日作成

令和6年4月17日改訂

令和6年5月12日改訂

粉体輸送

1. 粉体輸送装置

粉体輸送装置は、ベルトやスクリーやチェーンなど機械要素の運動を利用して輸送する機械式と管路内で空気流やスラリー流として輸送する流体式に大別される。機械式であるベルトコンベアは、装置内をえんえんと循環する搬送体(ベルトなど)に粉粒体を積載して輸送する。粉粒体と搬送体の間に作用する摩擦のために粉粒体が前進する。大型化が容易であるため貯槽からの切り出しに用いられることが多い。密閉化が困難であるため微粉など飛散しやすいものは適さない。スクリーコンベアは、断面形状が円またはU字をした本体内でらせん状のスクリーを水平方向に回転させ、粉粒体を前方へ押し出して輸送する。輸送速度の調節が容易である。チェーンコンベアの一種であるバケットコンベアは、バケットエレベーターとも呼ばれる。チェーンに多数のバケット(容器)を巻き付けておき、そこに輸送物を入れて垂直上方へ荷揚げする。大量輸送に適している。排出方式によって遠心排出型、完全排出型、誘導排出型に分類される。流体式である空気輸送装置は、ニューマチックコンベアとも呼ばれる。設備が単純で短距離に適用しやすい吸引式、低濃度の浮遊状態で連続輸送する低圧圧送式、低～高濃度のしゅう動状態またはプラグ流状態でバッチ輸送する高圧圧送式、設備が単純かつ低動力で大容量の水平輸送が可能なエアライド式に大別される。

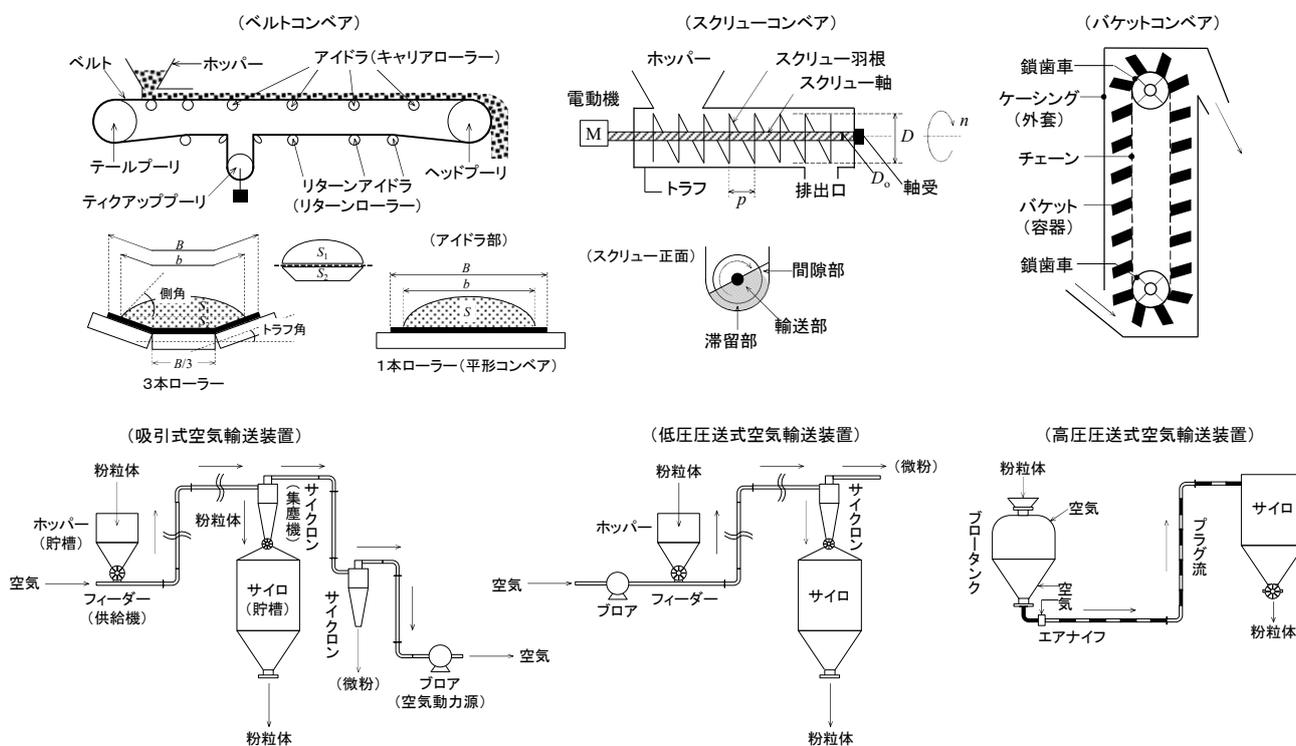


図 1.1 粉体輸送装置の例

2. 機械式輸送

2. 1 ベルトコンベア

①輸送性能 ベルトコンベアの輸送性能 Q [t/h]は、次式で与えられる。

$$Q=60Sv\rho_b \quad \cdots(2.1.1)$$

$$S=K(0.9B-0.05)^2 \quad \cdots(2.1.2)$$

ただし、 B はベルト幅[m]、 K は定数、 S は輸送物の積載断面積[m²]、 u はベルト速度[m/min]、 ρ_b は輸送物のかさ密度[t/m³]。

ベルト幅 B とベルト速度 u は、所定の輸送性能 Q を満たす組み合わせを表より選ぶ。 S の式を Q の式に代入する。

$$Q=60K(0.9B-0.05)^2v\rho_b \quad \cdots(2.1.3)$$

$$v=Q/[60K(0.9B-0.05)^2\rho_b] \quad \cdots(2.1.4)$$

上式に適当なベルト幅 B を試行錯誤的に代入して、標準仕様の表の最大ベルト速度になるべく近くなるようなベルト速度 u を見つける。

②輸送所要動力 ベルトコンベアの輸送所要動力 P [kW]は、無積載時動力 P_1 [kW]と水平輸送時動力 P_2 [kW]と垂直輸送時動力 P_3 [kW](下りの場合は負)と自走式トリッパ(コンベアの間で運搬物を降ろす装置。コンベアのみにも適用)運転時動力 P_t [kW]の和で求める。

$$P=P_1+P_2+P_3+P_t \quad \cdots(2.1.5)$$

無積載時動力 P_1 [kW]は、次式で与えられる。

$$P_1=0.06fwu(L+L_0)/367 \quad \cdots(2.1.6)$$

ただし、 f はローラーの回転摩擦係数[-](標準値 0.03)、 L はベルト長さ[m](輸送距離に相当)、 L_0 はベルト長さの補正值[m](標準値 49 m)、 u はベルト速度[m/min]、 w は輸送物以外のベルト長さあたり運動部分重量[kg/m]。

式中の 0.06 は、ベルト速度の単位を[m/min]から[m/h]に換算する分(=60 min/h)と動力の単位を[W]から[kW]に換算する分(=10⁻³ kW/W)に相当する。式中の 367 は、力と速度の積 $w(L+L_0)^{\text{kgf}} \times (60v)^{\text{m/h}}$ で表される動力の工学単位[kgf・m/h]から SI 単位[N・m/s]に換算する分(=(9.8)^{N/kgf}(1/3600)^{h/s}≒ 1/367)に相当する。

水平輸送時動力 P_2 [kW]は、次式で与えられる。

$$P_2=fQ(L+L_0)/367 \quad \cdots(2.1.7)$$

ただし、 Q は輸送性能[t/h]。

垂直輸送時動力 P_3 [kW]は、次式で与えられる。

$$P_3=HQ/367 \quad \cdots(2.1.8)$$

ただし、 H は垂直揚程[m](上り下りの高さ。下りの場合は負)。

自走式トリッパ運転時動力 P_t [kW]は、表より読み取る(ベルトコンベア)。

電動機動力 P_M [kW]は、次式で求める。

$$P_M=P/\eta_M \quad \cdots(2.1.9)$$

ただし、 η_M は電動機の機械効率[-](=0.75~0.85)。

電動機の定格出力を以下に示す。計算値よりもひとまわり大きい規格を選定する。

0.2, 0.4, 0.75, 1.5, 2.2, 3.7, 5.5, 7.5, 11, 15, 18.5, 22, 30, 37, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 150, 200 kW

表 2.1.1 ベルト幅と最大ベルト速度の関係(ベルトコンベア) [文献 1-3]

ベルト幅 [mm]	最大ベルト速度[m/min]								
	石炭 (大)*	石炭 (小)**	鉱石 (大)*	鉱石 (小)**	砂利 (大)*	砂利 (小)**	砂	木材 チップ	穀物
400	90	90	75	90	75	90	90	135	135
450	120	120	90	120	90	120	120	135	135
500	120	120	105	120	105	120	120	150	150
600	135	150	120	150	120	150	150	180	180
750	150	180	135	180	135	180	180	210	210
900	170	195	150	195	150	195	195	240	240
1050	180	210	150	195	150	195	210	240	240
1200	180	210	165	195	165	195	210	240	240
1400	195	210	165	195	165	195	210	240	240
高密度***	約 0.75		約 2.3		約 1.8		約 1.7	約 0.24	約 0.75
側角***	約 19°		約 19°		約 19°		約 20°	約 27°	約 12°

*75 mm 以上, **75 mm 未満, ***乾燥状態や含有成分等によって変動する。
フィーダーとして用いる場合は、最大ベルト速度 30 m/min 以下が目安となる。ここでは便宜上、上の表を 1/8 倍した値を用いる。

表 2.1.2 積載断面積 S 式の K 値 [文献 1-3]

トラフ角度	運搬物側角		
	10°	20°	30°
0°	0.0295	0.0591	0.0906
20°	0.0963	0.1245	0.1535
30°	0.1232	0.1488	0.1754
45°	0.1484	0.1698	0.1915

表 2.1.3 運搬物以外の運動部分の仮定重量 [文献 1-3]

ベルト幅[mm]	400	450	500	600	750	900	1050	1200
運動部分の仮定重量[kg/m]	24.0	28.3	31.3	37.3	50.7	65.7	74.3	88.0

表 2.1.4 自走式トリッパ運転時動力(ベルトコンベア) [文献 1-3]

ベルト幅[mm]	400	450	500	600	750	900	1050	1200
トリッパ運転時動力[kW]	1.50	1.50	1.50	1.50	2.65	2.65	3.55	3.55

【計算例】ベルトコンベア

- かさ密度 2.3 t/m³、粒子径 50 mm の鉱石を幅 500 mm のベルトコンベアで輸送する場合の輸送性能 Q [t/h]を求めよ。トラフ角度 20°とする。(330 t/h)
 $S=K(0.9B-0.05)^2=(0.1245)[(0.9)(0.500)-0.05]^2=0.01992 \text{ m}^2$
 $Q=60Sup_b=(60)(0.01992)(120)(2.3)=329.87 \text{ t/h} \approx \underline{330 \text{ t/h}}$
- かさ密度 2.3 t/m³、粒子径 50 mm の鉱石をベルトコンベアで 1 時間あたり 1000 t、上り方向に 200 m (揚程 10 m) 輸送する場合の①ベルト幅 B [mm]、②ベルト速度 u [m/min]、③輸送所要動力 P [kW]、④電動機の定格出力 P_M [kW]を求めよ。キャリアローラー数 3、トラフ角度 20°、トリッパ有り、電動機

効率 0.9 とする。(①750 mm, ②149 m/min, ③59.5 kW, ④75 kW)

$$B=750 \text{ mm}$$

$$u=Q/[60K(0.9B-0.05)^2\rho_s]=1000/[(60)(0.1245)\{(0.9)(750/1000)-0.05\}^2(2.3)]=149.00 \text{ m/min} \doteq 149 \text{ m/min}$$

$$(L+L_0)/367=(200+49)/367=0.67847$$

$$P_1=0.06f_wu[(L+L_0)/367]=(0.06)(0.03)(50.7)(149.00)(0.67847)=9.2256 \text{ kW}$$

$$P_2=fQ[(L+L_0)/367]=(0.03)(1000)(0.67847)=20.354 \text{ kW}$$

$$P_3=HQ/367=(10)(1000)/367=27.247 \text{ kW}$$

$$P_t=2.65 \text{ kW}$$

$$P=P_1+P_2+P_3+P_t=9.2256+20.354+27.247+2.65=59.476 \text{ kW} \doteq 59.5 \text{ kW}$$

$$P_M=P/\eta_M=59.476/0.9=66.084 \text{ kW} \rightarrow 75 \text{ kW}$$

【問題】ベルトコンベア

- (1) かさ密度 0.75 t/m^3 の穀物を幅 400 mm のベルトコンベアで輸送する場合の輸送性能 $Q \text{ [t/h]}$ を求めよ。トラフ角度 20° とする。(56.2 t/h)
- (2) かさ密度 0.75 t/m^3 の穀物をベルトコンベアで 1 時間あたり 500 t 、上り方向に 1000 m (揚程 20 m) 輸送する場合の①ベルト幅 $B \text{ [mm]}$ 、②ベルト速度 $u \text{ [m/min]}$ 、③輸送所要動力 $P \text{ [kW]}$ 、④電動機の定格出力 $P_M \text{ [kW]}$ を求めよ。キャリアローラー数 3、トラフ角度 20° 、トリッパ有り、電動機効率 0.9 とする。(①900 mm, ②200 m/min, ③140 kW, ④200 kW)

2. 2 スクリューコンベア

①輸送性能 スクリューコンベアの輸送性能 $Q \text{ [t/h]}$ は、次式で与えられる。

$$Q=60S\rho_b \quad \cdots(2.2.1)$$

ただし、 S は輸送物の輸送部占有断面積 $[\text{m}^2]$ 、 u は輸送速度 $[\text{m/min}]$ 、 ρ_b は輸送物のかさ密度 $[\text{t/m}^3]$ 。

輸送物の輸送部占有断面積 S は、充填率 ϕ [–] の定義式(スクリュー断面積と輸送部における占有断面積の比)より導かれる。

$$\phi=S/[\pi(D^2-D_o^2)/4] \quad \cdots(2.2.2)$$

$$S=(\pi/4)(D^2-D_o^2)\phi \quad \cdots(2.2.3)$$

ただし、 D はスクリュー外径 $[\text{m}]$ 、 D_o はスクリュー軸径 $[\text{m}]$ 。

スクリュー外径 D は、輸送物の粒子径をもとに標準仕様の表から選ぶ。粉粒体の粒子径や塊状物の割合が大きい場合は、スクリュー径を大きくとる。充填率 ϕ は、表より読み取る。

輸送速度 u は、スクリューのピッチ $p \text{ [m]}$ と回転速度 $n \text{ [rpm]} (=1/\text{min})$ の積で表される。

$$u=pn \quad \cdots(2.2.4)$$

安息角が大きいもの(流動性が良くないもの)、粉粒体の流動性が悪い場合や急勾配で使用する場合は、ピッチを小さくして輸送速度を小さくする。

②臨界回転速度 質量 $m_p \text{ [kg]}$ の単一固体粒子が有効半径 $R \text{ [m]} (=スクリュー半径-粒子半径 \doteq スクリュー半径)$ のスクリューの回転によって持ち上げられているとき、固体粒子にかかる遠心力と重力はつり合っている。

$$m_p u_p^2 / R = m_p g \cos \theta \quad \cdots(2.2.5)$$

$$(R\omega)^2 / R = g \cos \theta \quad \cdots(2.2.6)$$

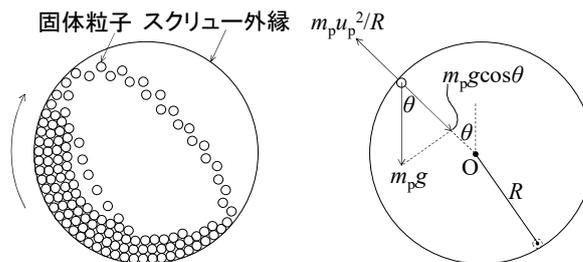
$$R^2 [2\pi(n/60)]^2 / R = g \cos \theta \quad \cdots(2.2.7)$$

$$(2\pi/60)^2 R n^2 = g \cos \theta \quad \cdots(2.2.8)$$

$$n = [g \cos \theta / \{(2\pi/60)^2 (D/2)\}]^{1/2}$$

$$[R = (D/2) - (D_p/2) \doteq D/2] \quad \cdots(2.2.9)$$

$$n = 42.3 [(\cos \theta) / D]^{1/2} \quad \cdots(2.2.10)$$



粒子がスクリーンの頂点($\theta=90^\circ$)でスクリーンから離れるときの回転速度が臨界回転速度 n_c [rpm]となる。

$$n_c = 42.3 / D^{1/2} \quad \cdots(2.2.11)$$

この値よりも大きいと固体粒子はスクリーンと一体となって回転するため、排出が困難となる。フィーダーとして用いる場合は100 rpm程度以下、コンベアとして用いる場合は180 rpm程度以下が目安となる。実際の回転速度 n [rpm]は、輸送性能の式より求める。

$$Q = 60 S p n \rho_b \quad [u = p n] \quad \cdots(2.2.12)$$

$$n = Q / (60 S p \rho_b) \quad \cdots(2.2.13)$$

③輸送所要動力 スクリューコンベアの輸送所要動力 P [kW]は、水平輸送動力と垂直輸送動力(下りの場合は負)の和で与えられる。

$$P = (KQL \pm QH) / 367 \quad \cdots(2.2.14)$$

ただし、 H は垂直揚程[m](上り下りの高さ。下りの場合は負)、 K は定数、 L はスクリーン長 [m](輸送距離に相当)、 Q は輸送性能[t/h]。 K 値は表より読み取る。

電動機動力 P_M [kW]は、次式で求める。

$$P_M = P / \eta_M \quad \cdots(2.2.15)$$

ただし、 η_M は電動機の機械効率[-](=0.7~0.8)。

電動機の定格出力を以下に示す。計算値よりもひとまわり大きい規格を選定する。

0.2, 0.4, 0.75, 1.5, 2.2, 3.7, 5.5, 7.5, 11, 15, 18.5, 22, 30, 37, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 150, 200 kW

表 2.2.1 運搬物のかさ密度と充填率の関係(水平輸送の場合) [文献 4, 5]

運搬物の例	穀物	粉炭、豆類	石炭	セメント、砂利	鉱石
運搬物の嵩密度[t/m ³]	0.5~0.7	0.6~0.8	0.8~1.2	0.8~1.8	1.8~
運搬物の寸法	微粉	粉~粒	粒~小塊	塊状	塊状
運搬物の摩耗性	無し	無し~小	中	中~大	大
充填率(コンベア)	0.45	0.38	0.31	0.25	0.125
充填率(フィーダー)	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
K値(動力推算式)	1.2	1.8	2.5	4	7

表 2.2.2 スクリューコンベア(またはフィーダー)の標準仕様例 [文献 6-9]

運搬物の平均粒子径 D_p [mm]	10	18	25	35	45	50
運搬物の最大粒子径 $D_{p,max}$ [mm]	25	50	75	100	125	150
スクリーン外径 D [mm]	100	200	300	400	500	600
スクリーン軸径 D_o [mm]	35	55	70	80	90	100
ピッチ p [mm](コンベア)	80	150	210	280	340	400
ピッチ p [mm](フィーダー)	50	100	150	200	250	300

【計算例】スクリーコンベア

- (1) かさ密度 0.65 t/m^3 、粒子径 7 mm の大豆をスクリーコンベアで輸送する場合の輸送性能 $Q \text{ [t/h]}$ を求めよ。スクリー回転速度 120 rpm とする。 (0.980 t/h)

$$S = (\pi/4)(D^2 - D_o^2)\phi = (\pi/4)(0.100^2 - 0.035^2)(0.38) = 0.0026189 \text{ m}^2$$

$$u = pn = (0.080)(120) = 9.60 \text{ m/min}$$

$$Q = 60S\upsilon\rho_b = (60)(0.0026189)(9.60)(0.65) = 0.98051 \text{ t/h} \doteq \boxed{0.980 \text{ t/h}}$$

$$n_c = 42.3/D^{0.5} = 42.3/(0.100)^{0.5} = 133.76 \text{ rpm} (>n)$$

- (1) かさ密度 1.5 t/m^3 、粒子径 25 mm の砂利をスクリーコンベアで 1 時間あたり 20 t 、水平方向に 100 m 輸送する場合の①スクリー外径 $D \text{ [mm]}$ 、②スクリー軸径 $D_o \text{ [mm]}$ 、③ピッチ $p \text{ [mm]}$ 、④スクリー回転速度 $n \text{ [rpm]}$ 、⑤臨界回転速度 $n_c \text{ [rpm]}$ 、⑥輸送所要動力 $P \text{ [kW]}$ 、⑦電動機の定格出力 $P_M \text{ [kW]}$ を求めよ。電動機効率 0.7 とする。(①300 mm, ②70 mm, ③210 mm, ④63 rpm, ⑤77 rpm, ⑥21.8 kW, ⑦37 kW)

$$D = \boxed{300 \text{ mm}}, D_o = \boxed{70 \text{ mm}}, p = \boxed{210 \text{ mm}}, \phi = 0.25$$

$$S = (\pi/4)(D^2 - D_o^2)\phi = (\pi/4)[(0.300)^2 - (0.07)^2](0.25) = 0.016709 \text{ m}^2$$

$$n = Q/(60S\upsilon\rho_b) = 20/[(60)(0.016709)(0.210)(1.5)] = 63.331 \doteq \boxed{63 \text{ rpm}}$$

$$n_c = 42.3/D^{0.5} = 42.3/(0.300)^{0.5} = 77.228 \text{ rpm} \doteq \boxed{77 \text{ rpm}} (>n)$$

$$P = (KQL \pm QH)/367 = [(4)(20)(100) \pm (20)(0)]/367 = 21.798 \text{ kW} \doteq \boxed{21.8 \text{ kW}}$$

$$P_M = P/\eta_M = 21.798/0.7 = 31.14 \text{ kW} \rightarrow \boxed{37 \text{ kW}}$$

【問題】スクリーコンベア

- (1) かさ密度 1.5 t/m^3 、粒子径 25 mm の砂利をスクリーコンベアで輸送する場合の輸送性能 $Q \text{ [t/h]}$ を求めよ。スクリー回転速度 70 rpm とする。 (22.1 t/h)
- (2) かさ密度 1.0 t/m^3 、粒子径 35 mm の石炭をスクリーコンベアで 1 時間あたり 20 t 、上り方向に 1000 m (揚程 20 m) 輸送する場合の①スクリー外径 $D \text{ [mm]}$ 、②スクリー軸径 $D_o \text{ [mm]}$ 、③ピッチ $p \text{ [mm]}$ 、④スクリー回転速度 $n \text{ [rpm]}$ 、⑤臨界回転速度 $n_c \text{ [rpm]}$ 、⑥輸送所要動力 $P \text{ [kW]}$ 、⑦電動機の定格出力 $P_M \text{ [kW]}$ を求めよ。電動機効率 0.7 とする。(①400 mm, ②80 mm, ③280 mm, ④32 rpm, ⑤67 rpm, ⑥137 kW, ⑦200 kW)

2. 3 バケットコンベア

①輸送性能 バケットコンベアの輸送性能 $Q \text{ [t/h]}$ は、次式で与えられる。

$$Q = 60\eta V\upsilon\rho_b/p \quad \cdots(2.3.1)$$

ただし、 p はバケットのピッチ[m]、 V はバケット 1 個の容積[m³]、 η はバケットの積み荷効率[-](バケット容積に対する輸送物の体積割合。一般に 0.7 程度)、 u は輸送速度[m/min](重い塊状物 18, 鉱石 40, 砂利 40, 石炭 40, 粉炭 120, 穀物 180 [文献 10, 11])、 ρ_b は輸送物のかさ密度[t/m³]。

②輸送所要動力 バケットコンベアの輸送所要動力 $P \text{ [kW]}$ は、垂直輸送時動力 $P_1 \text{ [kW]}$ と下部の鎖歯車から輸送物をすくいあげる動力 $P_2 \text{ [kW]}$ と上部の鎖歯車を回転させる動力 $P_3 \text{ [kW]}$ と下部の鎖歯車を回転さ

せる動力 P_4 [kW] の和で与えられる。

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \quad \cdots(2.3.2)$$

安全のため、上式の計算値の 1.2 倍を見込む。

垂直輸送時動力 P_1 [kW] は、次式で与えられる。

$$P_1 = HQ/367 \quad \cdots(2.3.3)$$

ただし、 H は垂直揚程[m]、 Q は輸送性能[t/h]。

下部の鎖歯車から輸送物をすくいあげる動力 P_2 [kW] は、次式で与えられる。

$$P_2 = 12D_g Q/367 \quad \cdots(2.3.4)$$

鎖歯車径 D_g [m] は、ホイールの歯数を N [-] として次式で表される。

$$D_g = p/\sin(180^\circ/N) \quad \cdots(2.3.5)$$

上部の鎖歯車を回転させる動力 P_3 [kW] と下部の鎖歯車を回転させる動力 P_4 [kW] は、十分に小さいため無視して差しつかえない。【文献 12】

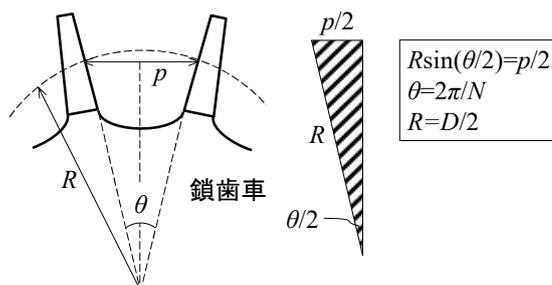
電動機動力 P_M [kW] は、次式で求める。

$$P_M = P/\eta_M \quad \cdots(2.3.6)$$

ただし、 η_M は電動機の機械効率[-] (約 0.8)。

電動機の定格出力を以下に示す。計算値よりもひとまわり大きい規格を選定する。

0.2, 0.4, 0.75, 1.5, 2.2, 3.7, 5.5, 7.5, 11, 15, 18.5, 22, 30, 37, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 150, 200 kW



【計算例】バケットコンベア

かさ密度 1.0 t/m^3 の石炭をバケットコンベアにより輸送速度 40 m/min で 25 m 垂直輸送する場合の①輸送性能 Q [t/h]、②輸送所要動力 P [kW]、③電動機の定格出力 P_M [kW] を求めよ。バケット 1 個の容積 18 L 、バケットピッチ 300 mm 、鎖歯車の歯数 9 、バケットの積み荷効率 0.7 、電動機の機械効率 0.8 とする。(① 101 t/h , ② 11.7 kW , ③ 15 kW)

$$Q = 60\eta V u \rho_b / p = (60)(0.7)(18 \times 10^{-3})(40)(1.0)/(300 \times 10^{-3}) = 100.8 \text{ t/h} \doteq \boxed{101 \text{ t/h}}$$

$$P_1 = HQ/367 = (25)(100.8)/367 = 6.8664 \text{ kW}$$

$$D_u = p/\sin(180^\circ/N) = (300 \times 10^{-3})/\sin(180^\circ/9) = 0.87714 \text{ m}$$

$$P_2 = 12D_g Q/367 = (12)(0.87714)(100.8)/367 = 2.8909 \text{ kW}$$

$$P = 1.2(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \doteq 1.2(P_1 + P_2) = (1.2)(6.8664 + 2.8909) = 11.708 \text{ kW} \doteq \boxed{11.7 \text{ kW}}$$

$$P_M = P/\eta_M = 11.708/0.8 = 14.635 \text{ kW} \rightarrow \boxed{15 \text{ kW}}$$

【問題】バケットコンベア

かさ密度 0.8 t/m^3 の穀物をバケットコンベアにより輸送速度 180 m/min で 20 m 垂直輸送する場合の①輸送性能 Q [t/h]、②輸送所要動力 P [kW]、③電動機の定格出力 P_M [kW] を求めよ。バケット 1 個の容積 2 L 、バケットピッチ 200 mm 、鎖歯車の歯数 12 、バケットの積み荷効率 0.7 、電動機の機械効率 0.8 とする。(① 60.5 t/h , ② 5.79 kW , ③ 7.5 kW)

3. 空気輸送

3. 1 浮遊速度

速度 u [m/s] で上昇する気流中を終末速度 u_t [m/s] で自由沈降する単一粒子の絶対速度 u_p [m/s] は、上昇流の向きを正にとると次式で表される。

$$u_p = u - u_t \quad \dots(3.1.1)$$

粒子の浮遊速度は、気流中で粒子が静止するときの気流速度で定義され ($u_p=0$)、終末速度に等しい。

$$u = u_t \quad \dots(3.1.2)$$

終末速度 u_t [m/s] は、静止流体中における粒子の運動方程式より導かれる。粒子形状は球とする。

$$(\pi/6)D_p^3\rho_p(du_p/dt) = (\pi/6)D_p^3\rho_p g - (\pi/6)D_p^3\rho g - C_D(\pi D_p^2/4)\rho u_p^2/2 \quad \dots(3.1.3)$$

$$0 = (\pi/6)D_p^3\rho_p g - (\pi/6)D_p^3\rho g - (\kappa/Re_p^\varepsilon)(\pi D_p^2/4)\rho u_t^2/2 \quad [C_D = \kappa/Re_p^\varepsilon] \quad \dots(3.1.4)$$

$$0 = (4/3)D_p(\rho_p - \rho)g - [\kappa/(D_p u_t \rho / \mu)^\varepsilon]\rho u_t^2 \quad [Re_p = D_p u_t \rho / \mu] \quad \dots(3.1.5)$$

$$0 = (4/3)D_p(\rho_p - \rho)g - \kappa \mu^\varepsilon D_p^{-\varepsilon} u_t^{2-\varepsilon} \rho^{1-\varepsilon} \quad \dots(3.1.6)$$

$$\kappa \mu^\varepsilon D_p^{-\varepsilon} u_t^{2-\varepsilon} \rho^{1-\varepsilon} = (4/3)D_p(\rho_p - \rho)g \quad \dots(3.1.7)$$

$$u_t = [(4/3)\kappa D_p^{1+\varepsilon}(\rho_p - \rho)g / (\mu^\varepsilon \rho^{1-\varepsilon})]^{1/(2-\varepsilon)} \quad \dots(3.1.8)$$

ただし、 C_D は抵抗係数[-]、 Re_p は粒子レイノルズ数、 ρ は空気密度[kg/m³]、 μ は空気粘度[Pa·s]、 κ と ε は定数 ($Re_p < 2$ のとき $\kappa=24$, $\varepsilon=1$ (Stokes)、 $2 < Re_p < 500$ のとき $\kappa=10$, $\varepsilon=0.5$ (Allen)、 $500 < Re_p$ のとき $\kappa=0.44$, $\varepsilon=0$ (Newton))。

3. 2 粒子速度

3.2.1 空気抵抗 [文献 13-15]

流速 u [m/s] で流れている空気中を単一の球状粒子が速度 u_p [m/s] で移動しているとき、粒子が空気流から受ける抵抗 R_f [N] は、次式で表される。

$$R_f = C_D(\pi D_p^2/4)\rho(u - u_p)^2/2 \quad \dots(3.2.1.1)$$

$$R_f = (\kappa/Re_p^\varepsilon)(\pi D_p^2/4)\rho(u - u_p)^2/2 \quad \dots(3.2.1.2)$$

$$R_f = [\kappa/\{D_p(u - u_p)\rho/\mu\}^\varepsilon](\pi D_p^2/4)\rho(u - u_p)^2/2 \quad \dots(3.2.1.3)$$

$$R_f = [\kappa/(\rho/\mu)^\varepsilon](\pi D_p^{2-\varepsilon}/4)\rho(u - u_p)^{2-\varepsilon}/2 \quad \dots(3.2.1.4)$$

静止空気中を移動する粒子の終末速度 u_t [m/s] に対する空気抵抗 R_{ft} [N] も同様の手順で導かれる。

$$R_{ft} = [\kappa/(\rho/\mu)^\varepsilon](\pi D_p^{2-\varepsilon}/4)\rho u_t^{2-\varepsilon}/2 \quad \dots(3.2.1.5)$$

両者の比を取る。

$$R_f/R_{ft} = [\{\kappa/(\rho/\mu)^\varepsilon\}(\pi D_p^{2-\varepsilon}/4)\rho(u - u_p)^{2-\varepsilon}/2] / [\{\kappa/(\rho/\mu)^\varepsilon\}(\pi D_p^{2-\varepsilon}/4)\rho u_t^{2-\varepsilon}/2] \quad \dots(3.2.1.6)$$

$$R_f/R_{ft} = (u - u_p)^{2-\varepsilon} / u_t^{2-\varepsilon} \quad \dots(3.2.1.7)$$

空気抵抗 R_{ft} [N] は、一般に粒子密度と空気密度の差が大きいことから浮力 F_b [N] を無視するとき、運動方程式を用いて次式のように導かれる。粒子形状は球とする。

$$(\pi/6)D_p^3\rho_p(du_p/dt) = (\pi/6)D_p^3\rho_p g - F_b - R_{ft} \quad \dots(3.2.1.8)$$

$$0 = (\pi/6)D_p^3\rho_p g - R_{ft} \quad [du_p/dt=0, (\pi/6)D_p^3\rho_p g - F_b = (\pi/6)D_p^3\rho_p g] \quad \dots(3.2.1.9)$$

$$R_{ft} = (\pi/6)D_p^3\rho_p g \quad \dots(3.2.1.10)$$

R_f/R_{ft} の式に代入する。

$$R_f = (\pi/6)D_p^3 \rho_p g (u - u_p)^{2-\varepsilon} / u_i^{2-\varepsilon} \quad \cdots(3.2.1.11)$$

輸送物が粉体のとき $\varepsilon=1$ (Stokes, $Re_p < 2$)、粒体のとき $\varepsilon=0$ (Newton, $500 < Re_p$)。

3.2.2 定常輸送時

定常輸送時($du_p/dt=0$)の理論的な粒子速度 u_p [m/s]は、管路内粒子群の運動方程式を用いて導かれる。

$$N(\pi/6)D_p^3 \rho_p (du_p/dt) = NR_f - N\mu_w(\pi/6)D_p^3 \rho_p g \cos\theta - N(\pi/6)D_p^3 \rho_p g \sin\theta \quad \cdots(3.2.2.1)$$

$$du_p/dt = g(u - u_p)^{2-\varepsilon} / u_i^{2-\varepsilon} - \mu_w g \cos\theta - g \sin\theta \quad \cdots(3.2.2.2)$$

$$0 = [(u - u_p)/u_i]^{2-\varepsilon} - \mu_w \cos\theta - \sin\theta \quad \cdots(3.2.2.3)$$

$$[(u - u_p)/u_i]^{2-\varepsilon} = \mu_w \cos\theta + \sin\theta \quad \cdots(3.2.2.4)$$

$$u - u_p = u_i (\mu_w \cos\theta + \sin\theta)^{1/(2-\varepsilon)} \quad \cdots(3.2.2.5)$$

$$u_p = u - u_i (\mu_w \cos\theta + \sin\theta)^{1/(2-\varepsilon)} \quad \cdots(3.2.2.6)$$

$$\phi = 1 - (u_i/u) (\mu_w \cos\theta + \sin\theta)^{1/(2-\varepsilon)} \quad [\phi = u_p/u] \quad \cdots(3.2.2.7)$$

ただし、 ϕ は無次元粒子速度[-]、 μ_w は壁摩擦係数[-]。

輸送物が粉体のとき $\varepsilon=1$ (Stokes, $Re_p < 2$)、粒体のとき $\varepsilon=0$ (Newton, $500 < Re_p$)。

運動方程式の右辺第1項は粒子群が空気流から受ける推力、第2項は粒子群が管壁から受ける摩擦力、第3項は重力の分力を表す。

終末速度 u_i [m/s]は、次式より求める。

$$\text{(粉体, } Re_p < 2) \quad u_i = g(\rho_p - \rho)D_p^2 / (18\mu) \quad \cdots(3.2.2.8)$$

$$\text{(粒体, } 500 < Re_p) \quad u_i = [3g(\rho_p - \rho)D_p / \rho]^{1/2} \quad \cdots(3.2.2.9)$$

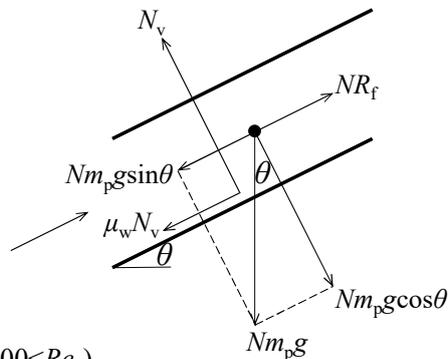
$$\text{(中間, } 2 < Re_p < 500) \quad u_i = [(4/225)g^2(\rho_p - \rho)^2 / (\rho\mu)]^{1/3} D_p \quad \cdots(3.2.2.10)$$

ただし、 Re_p は粒子レイノルズ数($=D_p u \rho / \mu$)。

実用的な粒子速度 u_p [m/s]は、管材質に依存する。鋼管については次の推算式を用いる。[文献 16-18]

$$\text{(水平管)} \quad u_p/u = 6.2\Gamma^{-0.18}(\rho_p/\rho)^{-0.28} \quad \cdots(3.2.2.11)$$

$$\text{(鉛直管)} \quad u - u_p = 0.71u_i(1 + 0.0065Fr^{2.5}Fr_i^{-1.25})^{0.5} \quad [Fr = u/(gD)^{0.5}, Fr_i = u_i/(gD)^{0.5}] \quad \cdots(3.2.2.12)$$



3.2.3 非定常輸送時 [文献 14, 15]

非定常輸送時($du_p/dt \neq 0$)の理論的な粒子速度 u_p [m/s]は、管路内粒子群の運動方程式を用いて導かれる。

$$N(\pi/6)D_p^3 \rho_p (du_p/dt) = NR_f - N\mu_w(\pi/6)D_p^3 \rho_p g \cos\theta - N(\pi/6)D_p^3 \rho_p g \sin\theta \quad \cdots(3.2.3.1)$$

$$du_p/dt = g(u - u_p)^{2-\varepsilon} / u_i^{2-\varepsilon} - \mu_w g \cos\theta - g \sin\theta \quad \cdots(3.2.3.2)$$

$$(u/g)(d\phi/dt) = (u^2 - 2uu_p + u_p^2) / u_i^2 - \mu_w \cos\theta - \sin\theta \quad [\phi \equiv u_p/u, \varepsilon=0 \text{ (粒体を仮定)}] \quad \cdots(3.2.3.3)$$

$$(u/g)(d\phi/dt) = (u/u_i)^2 - 2uu_p/u_i^2 + (u_p/u_i)^2 - \mu_w \cos\theta - \sin\theta \quad \cdots(3.2.3.4)$$

$$(u/g)(d\phi/dt) = (u/u_i)^2 [1 - 2(u_p/u) + (u_p/u)^2 - (u_i/u)^2 (\mu_w \cos\theta + \sin\theta)] \quad \cdots(3.2.3.5)$$

$$d\phi/dt = (gu/u_i^2) [1 - 2\phi + \phi^2 - (u_i/u)^2 (\mu_w \cos\theta + \sin\theta)] \quad \cdots(3.2.3.6)$$

$$d\phi/dt = A + 2B\phi + C\phi^2 \quad [A \equiv (gu/u_i^2) \{1 - (u_i/u)^2 (\mu_w \cos\theta + \sin\theta)\}, B \equiv -gu/u_i^2, C \equiv gu/u_i^2 (= -B)] \quad \cdots(3.2.3.7)$$

$$dt = d\phi / (A + 2B\phi + C\phi^2) \quad \cdots(3.2.3.8)$$

$$dt = d\phi / [C \{ (A/C) + (2B/C)\phi + \phi^2 \}] \quad \cdots(3.2.3.9)$$

$$dt = d\phi / [C(\phi - p)(\phi - q)] \quad \cdots(3.2.3.10)$$

$$dt = [d\phi / \{C(p - q)\}] [1 / (\phi - p) - 1 / (\phi - q)] \quad \cdots(3.2.3.11)$$

粒子の初速度は 0 とし、 $t=0 \sim t$ のとき $\phi=0 \sim \phi$ の条件で積分する。

$$t=[1/\{C(p-q)\}][\{\ln(\phi-p)-\ln(-p)\}-\{\ln(\phi-q)-\ln(-q)\}] \quad \cdots(3.2.3.12)$$

$$t=[1/\{C(p-q)\}][\ln\{(\phi-p)/(-p)\}-\ln\{(\phi-q)/(-q)\}] \quad \cdots(3.2.3.13)$$

$$t=[1/\{C(p-q)\}]\ln\{(\phi-p)/(-p)\}/\{(\phi-q)/(-q)\} \quad \cdots(3.2.3.14)$$

$$t=[1/\{C(p-q)\}]\ln[\{(\phi-p)/(\phi-q)\}(q/p)] \quad \cdots(3.2.3.15)$$

2 次方程式の解 p と q は、次式のように導かれる。

$$p=(1/2)[-(2B/C)+\{(2B/C)^2-4(A/C)\}^{1/2}] \quad \cdots(3.2.3.16)$$

$$p=-B/C+[(B/C)^2-(A/C)]^{1/2} \quad \cdots(3.2.3.17)$$

$$p=1+(1/C)(B^2-AC)^{1/2} \quad \cdots(3.2.3.18)$$

$$\boxed{p=1+(1/C)X} \quad \cdots(3.2.3.19)$$

$$q=(1/2)[-(2B/C)-\{(2B/C)^2-4(A/C)\}^{1/2}] \quad \cdots(3.2.3.20)$$

$$q=-B/C-[(B/C)^2-(A/C)]^{1/2} \quad \cdots(3.2.3.21)$$

$$q=1-(1/C)(B^2-AC)^{1/2} \quad \cdots(3.2.3.22)$$

$$\boxed{q=1-(1/C)X} \quad \cdots(3.2.3.23)$$

$$p-q=[1+(1/C)X]-[1-(1/C)X] \quad \cdots(3.2.3.24)$$

$$p-q=(2/C)X \quad \cdots(3.2.3.25)$$

$$q/p=[1-(1/C)X]/[1+(1/C)X] \quad \cdots(3.2.3.26)$$

$$q/p=(C-X)/(C+X) \quad \cdots(3.2.3.27)$$

X は次式のように導かれる。

$$X=(B^2-AC)^{1/2} \quad \cdots(3.2.3.28)$$

$$X=(C^2-AC)^{1/2} \quad \cdots(3.2.3.29)$$

$$X=C^{1/2}(C-A)^{1/2} \quad \cdots(3.2.3.30)$$

$$X=(gu/u^2)^{1/2}[(gu/u^2)-\{(gu/u^2)\{1-(u/u)^2(\mu_w \cos\theta + \sin\theta)\}\}]^{1/2} \quad \cdots(3.2.3.31)$$

$$X=(gu/u^2)^{1/2}[(gu/u^2)(u^2/u^2)(\mu_w \cos\theta + \sin\theta)]^{1/2} \quad \cdots(3.2.3.32)$$

$$X=(gu/u^2)^{1/2}[(g/u)(\mu_w \cos\theta + \sin\theta)]^{1/2} \quad \cdots(3.2.3.33)$$

$$X=[(g^2/u^2)(\mu_w \cos\theta + \sin\theta)]^{1/2} \quad \cdots(3.2.3.34)$$

$$\boxed{X=(g/u)(\mu_w \cos\theta + \sin\theta)^{1/2}} \quad \cdots(3.2.3.35)$$

p と q の式を t の式に代入すると、無次元粒子速度が ϕ に達するまでの所要時間 t が導かれる。

$$t=[1/\{C(2/C)X\}]\ln[\{(\phi-1-(X/C))/(\phi-1+(X/C))\}\{(C-X)/(C+X)\}] \quad \cdots(3.2.3.36)$$

$$t=[1/(2X)]\ln[\{(C\phi-C-X)/(C\phi-C+X)\}\{(C-X)/(C+X)\}] \quad \cdots(3.2.3.37)$$

$$t=(2X)^{-1}\ln[(C\phi-C-X)(C-X)/(C\phi-C+X)(C+X)] \quad \cdots(3.2.3.38)$$

$$\boxed{t=(2X)^{-1}\ln[\{(C(\phi-1)-X)(C-X)\}/\{(C(\phi-1)+X)(C+X)\}]} \quad \cdots(3.2.3.39)$$

上式を整理すると、任意の時間 t における無次元粒子速度 ϕ の式が導かれる。

$$e^{2Xt}=[\{C(\phi-1)-X\}(C-X)]/[\{C(\phi-1)+X\}(C+X)] \quad \cdots(3.2.3.40)$$

$$e^{2Xt}[C(C+X)(\phi-1)+X(C+X)]=C(C-X)(\phi-1)-X(C-X) \quad \cdots(3.2.3.41)$$

$$[C(C+X)e^{2Xt}-C(C-X)](\phi-1)=-X(C-X)-X(C+X)e^{2Xt} \quad \cdots(3.2.3.42)$$

$$\phi-1-[\{X(C-X)+X(C+X)e^{2Xt}\}/\{C(C+X)e^{2Xt}-C(C-X)\}] \quad \cdots(3.2.3.43)$$

$$\phi=[\{C(C+X)e^{2Xt}-C(C-X)\}-\{X(C-X)+X(C+X)e^{2Xt}\}]/[C(C+X)e^{2Xt}-C(C-X)] \quad \cdots(3.2.3.44)$$

$$\phi = [(C-X)(C+X)e^{2Xt} - (C-X)(C+X)] / [C(C+X)e^{2Xt} - C(C-X)] \quad \cdots(3.2.3.45)$$

$$\phi = (1/C) [(C-X)(C+X)(1 - e^{-2Xt})] / [(C+X) - (C-X)e^{-2Xt}] \quad [C \equiv gu/u_t^2, X \equiv (g/u_t)(\mu_w \cos\theta + \sin\theta)^{1/2}] \quad \cdots(3.2.3.46)$$

十分に長い時間が経過すると ($t \rightarrow \infty, e^{-2Xt} \rightarrow 0$)、定常輸送時の無次元粒子速度式に一致する。

$$\phi = (1/C)(C-X)(C+X)/(C+X) \quad \cdots(3.2.3.47)$$

$$\phi = 1 - (X/C) \quad \cdots(3.2.3.48)$$

$$\phi = 1 - (g/u_t)(\mu_w \cos\theta + \sin\theta)^{1/2} / (gu/u_t^2) \quad \cdots(3.2.3.49)$$

$$\phi = 1 - (u_t/u)(\mu_w \cos\theta + \sin\theta)^{1/2} \quad \cdots(3.2.3.50)$$

【計算例】粒子速度

平均粒子径 3 mm、粒子密度 1400 kg/m³、壁摩擦係数 0.4 の小麦を鋼管により混合比 10、平均流速 20 m/s で水平に空気輸送する。定常輸送時の①理論的な粒子速度 u_p [m/s]、②実用的な粒子速度 u_p [m/s] を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s、重力加速度 9.81 m/s² とする。(①13.6 m/s, ②11.3 m/s)

$$u_t = [3g(\rho_p - \rho)D_p/\rho]^{1/2} = [(3)(9.81)(1400 - 1.2)(3 \times 10^{-3})/(1.2)]^{1/2} = 10.144 \text{ m/s (Newton 域を仮定)}$$

$$Re_p = D_p u_t \rho / \mu = (3 \times 10^{-3})(10.144)(1.2)/(18.2 \times 10^{-6}) = 2006 > 500 \quad \text{Newton 域の仮定は、正しい。}$$

$$\phi = 1 - (u_t/u)(\mu_w \cos\theta + \sin\theta)^{1/2} = 1 - (10.144/20)(0.4 \cos 0 + \sin 0)^{1/2} = 1 - (10.144/20)(0.4)^{1/2} = 0.67921$$

$$u_p = \phi u = (0.67921)(20) = 13.584 \text{ m/s} \doteq \boxed{13.6 \text{ m/s}}$$

$$u_p/u = 6.2 \Gamma^{-0.18} (\rho_p/\rho)^{-0.28} = (6.2)(10)^{-0.18} (1400/1.20)^{-0.28} = 0.56708$$

$$u_p = (u_p/u)u = (0.56708)(20) = 11.341 \text{ m/s} \doteq \boxed{11.3 \text{ m/s}}$$

【問題】粒子速度

- (1) 平均粒子径 7 mm、粒子密度 1200 kg/m³、壁摩擦係数 0.3 の大豆を鋼管により混合比 12、平均流速 20 m/s で水平に空気輸送する。定常輸送時の①理論的な粒子速度 u_p [m/s]、②実用的な粒子速度 u_p [m/s] を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s、重力加速度 9.81 m/s² とする。(①12.1 m/s, ②11.4 m/s)
- (2) 平均粒子径 3 mm、粒子密度 1400 kg/m³、壁摩擦係数 0.4 の小麦を 7B 鋼管により平均流速 20 m/s で鉛直上向きに空気輸送する。定常輸送時の①理論的な粒子速度 u_p [m/s]、②実用的な粒子速度 u_p [m/s] を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s、重力加速度 9.81 m/s² とする。(①9.86 m/s, ②11.3 m/s)
- (3) 平均粒子径 0.8 mm、粒子密度 2650 kg/m³、壁摩擦係数 0.4 の砂を鋼管により平均流速 20 m/s で斜め上向き 30°の方向に空気輸送する。定常輸送時の理論的な粒子速度 u_p [m/s] を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s、重力加速度 9.81 m/s² とする。(14.1 m/s)

3. 3 空気单相流の圧力損失

管路内における空気单相流の圧力損失 ΔP_G [Pa] は、直管部の圧力損失 ΔP_{GS} [Pa] と曲管部の圧力損失 ΔP_{GB} [Pa] の和で表される。

$$\Delta P_G = \Delta P_{GS} + \Delta P_{GB} \quad \cdots(3.3.1)$$

直管部の圧力損失 ΔP_{GS} を導く。管壁が受ける流体抵抗 F_w [N] は、円管の側面積と運動エネルギーに比例

するものとして次式で表される。

$$F_w = f(\pi DL)(\rho u^2/2) \quad \dots(3.3.2)$$

ただし、 f は管(くだ)摩擦係数[-]。

垂直円管の出入口に作用する力のつり合いより直管部の圧力損失を表すファニングの式を得る。

$$\pi r^2 p_1 = \pi r^2 p_2 + \pi r^2 L \rho g + f(\pi DL)(\rho u^2/2) \quad \dots(3.3.3)$$

$$\pi r^2 \Delta P_{GS} = f(\pi DL)(\rho u^2/2) \quad \dots(3.3.4)$$

$$\Delta P_{GS} = [f(\pi DL) / \{\pi(D/2)^2\}] (\rho u^2/2) \quad \dots(3.3.5)$$

$$\Delta P_{GS} = 4f(L/D)(\rho u^2/2) \quad \dots(3.3.6)$$

$$\Delta P_{GS} = 4f(\Sigma L/D)(\rho u^2/2) \quad (\text{複数の直管が接続される場合}) \quad \dots(3.3.7)$$

$$Re < 2100 \text{ のとき} \quad f = 16/Re \quad \dots(3.3.8)$$

$$3000 < Re < 10^5 \text{ のとき} \quad f = 0.0791 Re^{-0.25} \quad \text{ブラジウス式} \quad \dots(3.3.9)$$

$$10^5 < Re \text{ のとき} \quad f = 0.0008 + 0.05525 Re^{-0.237} \quad \text{ニコラーゼ式} \quad \dots(3.3.10)$$

曲管部(バンド)の圧力損失 ΔP_{GB} [Pa]は、次式で与えられる。

$$\Delta P_{GB} = \Sigma \zeta_{GB} (\rho u^2/2) \quad \dots(3.3.11)$$

曲管部の損失係数 ζ_{GB} (ゼータ)[-]は、次式を用いる。【文献19】

$$Re(r/R)^2 < 91 \text{ のとき} \quad \zeta_{GB} = 0.00873 \alpha \lambda_c \theta (R/r) \quad [\lambda_c = 0.316 Re^{-1/5} (R/r)^2, Re = Dup/\mu] \quad \dots(3.3.12)$$

$$Re(r/R)^2 > 91 \text{ のとき} \quad \zeta_{GB} = 0.00241 \alpha \theta Re^{-0.17} (R/r)^{0.84} \quad \dots(3.3.13)$$

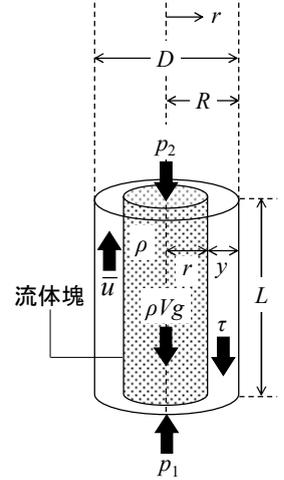
$$(45^\circ \text{バンド}) \quad \alpha = 1 + 14.2 (R/r)^{-1.47} \quad \dots(3.3.14)$$

$$(90^\circ \text{バンド}, R/r < 19.7) \quad \alpha = 0.95 + 17.2 (R/r)^{-1.96} \quad \dots(3.3.15)$$

$$(90^\circ \text{バンド}, R/r > 19.7) \quad \alpha = 1 \quad \dots(3.3.16)$$

$$(180^\circ \text{バンド}) \quad \alpha = 1 + 116 (R/r)^{-4.52} \quad \dots(3.3.17)$$

ただし、 r は管半径[m]、 R はバンドの曲率半径[m]、 R/r は半径比[-]、 u は輸送空気流速[m/s]、 θ は曲がり角[deg.]。



【計算例】空気単相流の圧力損失

管長 10 m の 7B 鋼管 3 本と半径比 12 の 90°バンド 2 個からなる管路内を空気が平均流速 20 m/s で流れている。管路内における①直管部の圧力損失 ΔP_{GS} [Pa]、②曲管部の圧力損失 ΔP_{GB} 、③全圧力損失 ΔP_G [Pa]を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s とする。(①598 Pa, ②111 Pa, ③709 Pa)

$$D = D_o - 2t_f = 190.7 - (2)(5.3) = 180.1 \text{ mm} = 0.1801 \text{ m}$$

$$Re = Dup/\mu = (0.1801)(20)(1.2)/(18.2 \times 10^{-6}) = 2.3749 \times 10^5$$

$$f = 0.0008 + 0.05525 Re^{-0.237} = 0.0008 + (0.05525)(2.3749 \times 10^5)^{-0.237} = 0.0037397$$

$$\Delta P_{GS} = 4f(\Sigma L/D)(\rho u^2/2) = (4)(0.0037397)(30/0.1801)(1.2)(20)^2/2 = 598.01 \text{ Pa} \approx \boxed{598 \text{ Pa}}$$

$$\alpha = 0.95 + 17.2 (R/r)^{-1.96} = 0.95 + (17.2)(12)^{-1.96} = 1.0819$$

$$Re(r/R)^2 = (2.3749 \times 10^5)(1/12)^2 = 1649.2 > 91$$

$$\zeta_{GB} = 0.00241 \alpha \theta Re^{-0.17} (R/r)^{0.84} = (0.00241)(1.0819)(90)(2.3749 \times 10^5)^{-0.17} (12)^{0.84} = 0.23072$$

$$\Delta P_{GB} = \Sigma \zeta_{GB} (\rho u^2/2) = (2 \zeta_{GB})(\rho u^2/2) = (2)(0.23072)(1.2)(20)^2/2 = 110.74 \text{ Pa} \approx \boxed{111 \text{ Pa}}$$

$$\Delta P_G = \Delta P_{GS} + \Delta P_{GB} = 598.01 + 110.74 = 708.75 \text{ Pa} \approx \boxed{709 \text{ Pa}}$$

【問題】 空気単相流の圧力損失

- (1) 管長 50 m の 8B 鋼管 2 本と半径比 12 の 90°ベンド 1 個からなる管路内を空気が平均流速 20 m/s で流れている。管路内における①直管部の圧力損失 ΔP_{GS} [Pa]、②曲管部の圧力損失 ΔP_{GB} 、③全圧力損失 ΔP_G [Pa]を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s とする。(①1713 Pa, ②54.2 Pa, ③1767 Pa)
- (2) 管長 6 m の 7B 鋼管 5 本と半径比 12 の 45°ベンド 4 個からなる管路内を空気が平均流速 20 m/s で流れている。管路内における①直管部の圧力損失 ΔP_{GS} [Pa]、②曲管部の圧力損失 ΔP_{GB} 、③全圧力損失 ΔP_G [Pa]を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s とする。(①598 Pa, ②140 Pa, ③738 Pa)

3. 4 固気二相流の圧力損失

3. 4. 1 全圧力損失

管路内における固気二相流の全圧力損失 ΔP_T [Pa]は、空気単相流の圧力損失 ΔP_G [Pa]と固体粒子の存在による付加圧力損失 ΔP_S [Pa]の和で与えられる。

$$\Delta P_T = \Delta P_G + \Delta P_S \quad \cdots(3.4.1.1)$$

付加圧力損失 ΔP_S [Pa]は、①固体粒子の加速による圧力損失 ΔP_{SA} [Pa]、②直管部での粒子-管壁間摩擦による圧力損失 ΔP_{SF} [Pa]、③曲管部での粒子-管壁間摩擦による圧力損失 ΔP_{SB} [Pa]の和で表される。

$$\Delta P_S = \Delta P_{SA} + \Delta P_{SF} + \Delta P_{SB} \quad \cdots(3.4.1.2)$$

3. 4. 2 加速時圧力損失

固体粒子の加速による圧力損失 ΔP_{SA} [Pa]は、次式で与えられる。

$$\Delta P_{SA} = \zeta_{SA}(\rho u^2/2) \quad \cdots(3.4.2.1)$$

加速損失係数 ζ_{SA} [-]は、森川の式を用いる。[文献 18, 20]

$$(\text{水平管}) \quad \zeta_{SA} = (1.82 - 0.078u_t)\Gamma \quad \cdots(3.4.2.2)$$

$$(\text{鉛直管}) \quad \zeta_{SA} = (2.43 - 0.089u_t)\Gamma \quad \cdots(3.4.2.3)$$

ただし、 u_t は終末速度[m/s]、 Γ は混合比[-]。

終末速度 u_t [m/s]は、次式より求める。

$$Re_p < 2 \text{ のとき} \quad u_t = g(\rho_p - \rho)D_p^2 / (18\mu) \quad \cdots(3.4.2.4)$$

$$2 < Re_p < 500 \text{ のとき} \quad u_t = [(4/225)g^2(\rho_p - \rho)^2 / (\rho\mu)]^{1/3} D_p \quad \cdots(3.4.2.5)$$

$$500 < Re_p \text{ のとき} \quad u_t = [3g(\rho_p - \rho)D_p / \rho]^{1/2} \quad \cdots(3.4.2.6)$$

ただし、 Re_p は粒子レイノルズ数(= $D_p u \rho / \mu$)。

【計算例】 加速時圧力損失

平均粒子径 3 mm、粒子密度 1400 kg/m³ の小麦を混合比 10、平均流速 20 m/s で空気輸送する。①水平管内における加速時圧力損失 $\Delta P_{SA,h}$ [kPa]、②鉛直管内における加速時圧力損失 $\Delta P_{SA,v}$ [kPa]を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s とする。(①2.47 kPa, ②3.67 kPa)

$$u_t = [3g(\rho_p - \rho)D_p / \rho]^{1/2} = [(3)(9.81)(1400 - 1.2)(3 \times 10^{-3}) / (1.2)]^{1/2} = 10.144 \text{ m/s (Newton 域を仮定)}$$

$$Re_p = D_p u \rho / \mu = (3 \times 10^{-3})(10.144)(1.20) / (18.2 \times 10^{-6}) = 2006 > 500 \quad \text{Newton 域の仮定は、正しい。}$$

$$\zeta_{SA,h} = (1.82 - 0.078u_t)\Gamma = [1.82 - (0.078)(10.144)](10) = 10.287$$

$$\Delta P_{SA,h} = \zeta_{SA,h}(\rho u^2/2) = (10.287)(1.2)(20)^2/2 = 2468.8 \text{ Pa} \doteq \boxed{2.47 \text{ kPa}}$$

$$\zeta_{SA,v} = (2.43 - 0.089u_t)\Gamma = [2.43 - (0.089)(10.144)](10) = 15.271$$

$$\Delta P_{SA,v} = \zeta_{SA,v}(\rho u^2/2) = (15.271)(1.2)(20)^2/2 = 3665.0 \text{ Pa} \doteq \boxed{3.67 \text{ kPa}}$$

【問題】 加速時圧力損失

- (1) 平均粒子径 7 mm、粒子密度 1200 kg/m³ の大豆を混合比 12、平均流速 20 m/s で空気輸送する。①水平管内における加速時圧力損失 $\Delta P_{SA,h}$ [kPa]、②鉛直管内における加速時圧力損失 $\Delta P_{SA,v}$ [kPa] を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s とする。(①2.01 kPa, ②3.32 kPa)
- (2) 平均粒子径 3 mm、粒子密度 1400 kg/m³ の小麦を混合比 20、平均流速 15 m/s で空気輸送する。①水平管内における加速時圧力損失 $\Delta P_{SA,h}$ [kPa]、②鉛直管内における加速時圧力損失 $\Delta P_{SA,v}$ [kPa] を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s とする。(①2.78 kPa, ②4.12 kPa)

3.4.3 直管部の粒子-管壁間圧力損失

球状の固体粒子を含む空気が管径 D [m]、断面積 A [m²] の円管内を一定流速で流れているものとする。気流が管路内を距離 L [m] だけ進む間に生じる粒子-管壁間摩擦による圧力損失 ΔP_{SF} [Pa] は、流体塊に及ぼす力のつり合い式より導かれる。

$$PA = NR_f + (P - \Delta P_{SF})A \quad \cdots(3.4.3.1)$$

$$\Delta P_{SF} = NF/A \quad \cdots(3.4.3.2)$$

ただし、 R_f は粒子 1 個が受ける空気抵抗 [N]、 N は粒子個数 [–]。

実際の粒子運動は不規則であり、管路の壁面近傍と本体側とは流動挙動が大きく異なることから、上式に補正係数 η [–] を乗じる。

$$\Delta P_{SF} = \eta NR_f/A \quad \cdots(3.4.3.3)$$

粒子個数 N [–] の式を導く。固体粒子を含む空気が距離 L [m] だけ進む間に成り立つ質量保存式を用いる。

$$Nm_p + (AL - Nm_p/\rho_p)\rho = \rho_{pf}AL \quad \cdots(3.4.3.4)$$

$$N = (\rho_{pf} - \rho)AL / [m_p \{1 - (\rho/\rho_p)\}] \quad \cdots(3.4.3.5)$$

$$N \doteq (\rho_{pf} - \rho)AL / m_p \quad (\rho \ll \rho_p) \quad \cdots(3.4.3.6)$$

$$\boxed{N \doteq (\rho_{pf} - \rho)AL / [(\pi/6)\rho_p D_p^3]} \quad \cdots(3.4.3.7)$$

ただし、 m_p は粒子質量 [kg]、 ρ は空気密度 [kg/m³]、 ρ_{pf} は粉体流密度 [kg/m³]、 ρ_p は粒子密度 [kg/m³]。

粉体流密度 ρ_{pf} [kg/m³] は、次式のように導かれる。

$$\rho_{pf} = [w(L/u) + w_p(L/u_p)] / (AL) \quad \cdots(3.4.3.8)$$

$$\rho_{pf} = [(w/u) + (w_p/u_p)] / A \quad \cdots(3.4.3.9)$$

$$\rho_{pf} = (w/u) [1 + (w_p/u_p)/(w/u)] / A \quad \cdots(3.4.3.10)$$

$$\rho_{pf} = [1 + (w_p/w)/(u_p/u)] \rho \quad \cdots(3.4.3.11)$$

$$\boxed{\rho_{pf} = [1 + (\Gamma/\phi)] \rho} \quad [\phi = u_p/u, \Gamma = w_p/w] \quad \cdots(3.4.3.12)$$

ただし、 w は空気の質量流量 [kg/s]、 w_p は粒子の質量流量 [kg/s]、 ϕ は速度比 [–]、 Γ は混合比 [–]。

空気抵抗 R_f [N] は、次式で表される。

$$R_f = C_D(\pi D_p^2/4)\rho(u - u_p)^2/2 \quad \cdots(3.4.3.13)$$

$$C_D = \kappa / Re_p^\epsilon \quad \cdots(3.4.3.14)$$

$$Re_p = D_p(u - u_p)\rho/\mu \quad \cdots(3.4.3.15)$$

ただし、 C_D は抵抗係数[-]、 Re_p は粒子レイノルズ数[-]、 u は空気速度[m/s]、 u_p は粒子速度[m/s]、 ρ は空気密度[kg/m³]、 μ は空気粘度[Pa·s]、 κ と ε は定数($Re_p < 2$ のとき $\kappa=24$, $\varepsilon=1$ (Stokes)、 $2 < Re_p < 500$ のとき $\kappa=10$, $\varepsilon=0.5$ (Allen)、 $500 < Re_p$ のとき $\kappa=0.44$, $\varepsilon=0$ (Newton))。

粒子レイノルズ数 Re_p と円管内流れのレイノルズ数 Re の比を取る。

$$Re_p/Re = [D_p(u - u_p)\rho/\mu]/(Du\rho/\mu) \quad \cdots(3.4.3.16)$$

$$Re_p/Re = [1 - (u_p/u)](D_p/D) \quad \cdots(3.4.3.17)$$

$$Re_p = (1 - \phi)(D_p/D)Re \quad \cdots(3.4.3.18)$$

抵抗係数 C_D の式に代入する。

$$C_D = \kappa/[1 - \phi)(D_p/D)Re]^\varepsilon \quad \cdots(3.4.3.19)$$

空気抵抗 R_f の式に代入する。

$$R_f = [\kappa/\{(1 - \phi)(D_p/D)Re\}^\varepsilon](\pi D_p^2/4)\rho(u - u_p)^2/2 \quad \cdots(3.4.3.20)$$

$$R_f = \pi\kappa D_p^2\rho(u - u_p)^2/[8\{(1 - \phi)(D_p/D)Re\}^\varepsilon] \quad \cdots(3.4.3.21)$$

$$R_f = \pi\kappa D_p^2\rho u^2(1 - \phi)^2/[8\{(1 - \phi)(D_p/D)Re\}^\varepsilon] \quad \cdots(3.4.3.22)$$

粒子個数 N と空気抵抗 R_f と粉体流密度 ρ_{pf} の式を ΔP_{SF} [Pa] の式に代入する。

$$\Delta P_{SF} = (\eta/A)[\{1 + (\Gamma/\phi)\}\rho - \rho]AL/\{(\pi/6)\rho_p D_p^3\}[\pi\kappa D_p^2\rho u^2(1 - \phi)^2/\{8\{(1 - \phi)(D_p/D)Re\}^\varepsilon\}] \quad \cdots(3.4.3.23)$$

$$\Delta P_{SF} = [(3/4)\eta(\Gamma L/\phi)/(\rho_p D_p)][\kappa\rho^2 u^2(1 - \phi)^2/\{(1 - \phi)^\varepsilon(D_p/D)^\varepsilon Re^\varepsilon\}] \quad \cdots(3.4.3.24)$$

$$\Delta P_{SF} = (3/2)\eta(\kappa\Gamma/Re^\varepsilon)[(1 - \phi)/\phi]^{2-\varepsilon}[(1/D_p)(D/D_p)^\varepsilon](\rho/\rho_p)(\rho u^2/2)L \quad \cdots(3.4.3.25)$$

$$\Delta P_{SF} = 1.5\eta(\kappa\Gamma/Re^\varepsilon)[(1 - \phi)/\phi]^{2-\varepsilon}[(1/D_p)(D/D)(D/D_p)^\varepsilon](\rho/\rho_p)(\rho u^2/2)L \quad \cdots(3.4.3.26)$$

$$\Delta P_{SF} = 1.5\eta(\kappa\Gamma/Re^\varepsilon)[(1 - \phi)/\phi]^{2-\varepsilon}(D/D_p)^{1+\varepsilon}(\rho/\rho_p)(L/D)(\rho u^2/2) \quad \cdots(3.4.3.27)$$

$$\boxed{\Delta P_{SF} = \lambda_{SF}(L/D)(\rho u^2/2)} \quad [\lambda_{SF} = 1.5\eta(\kappa\Gamma/Re^\varepsilon)[(1 - \phi)/\phi]^{2-\varepsilon}(D/D_p)^{1+\varepsilon}(\rho/\rho_p)] \quad \cdots(3.4.3.28)$$

$$\Delta P_{SF} = \lambda_{SF}(\Sigma L/D)(\rho u^2/2) \quad (\text{複数の直管が接続される場合}) \quad \cdots(3.4.3.29)$$

ただし、 λ_{SF} は摩擦係数[-]。

補正係数 η については、次式が知られている。[文献 21]

$$\eta = 0.0520 Fr^{1+(c/2.5)} \quad [Fr = u/(gD)^{1/2}] \quad \cdots(3.4.3.30)$$

3.4.4 曲管部の粒子-管壁間圧力損失 [文献 22, 23]

曲管部(バンド)における固体粒子と管壁間の摩擦による圧力損失 ΔP_{SB} [Pa] は、次式で与えられる。

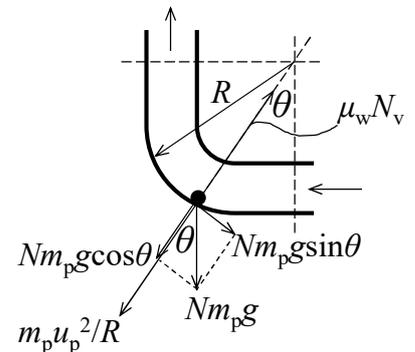
$$\Delta P_{SB} = \Sigma \zeta_{SB} \Gamma (\rho u^2/2) \quad \cdots(3.4.4.1)$$

バンドは鉛直面内に置かれるものとし、水平から鉛直上向きへの流れを考える。バンド内を流れる粒子群が微小距離 $Rd\theta (= 2\pi R \times d\theta/2\pi)$ だけ進む間に生じる粒子-管壁間摩擦による微小圧力損失 $d(\Delta P_{SB})$ [Pa] は、重力による力 W [N] と重力に基づく摩擦力 F_g [N] と遠心力に基づく摩擦力 F_c [N] の合力より導かれる。

$$d(\Delta P_{SB}) = (1/A)(W + F_g + F_c) \quad \cdots(3.4.4.2)$$

$$d(\Delta P_{SB}) = (1/A)[w_p(Rd\theta/u_p)g\sin\theta + \mu_w w_p(Rd\theta/u_p)g\cos\theta + \mu_w w_p(Rd\theta/u_p)(u_p^2/R)] \quad \cdots(3.4.4.3)$$

$$d(\Delta P_{SB}) = (1/A)w_p(Rd\theta/u_p)[g\sin\theta + \mu_w g\cos\theta + \mu_w(u_p^2/R)] \quad \cdots(3.4.4.4)$$



$$d(\Delta P_{SB})=[w_p R/(u_p A)][g \sin \theta d\theta + \mu_w g \cos \theta d\theta + \mu_w (u_p^2/R) d\theta] \quad \cdots(3.4.4.5)$$

$d(\Delta P_{SB})=0 \sim \Delta P_{SB}$ のとき $d\theta=0 \sim \pi/2$ の範囲で積分する。

$$\Delta P_{SB}=[w_p R/(u_p A)][g\{-\cos(\pi/2)+\cos 0\}+\mu_w g\{\sin(\pi/2)-\sin 0\}+\mu_w (u_p^2/R)\{(\pi/2)-0\}] \quad \cdots(3.4.4.6)$$

$$\Delta P_{SB}=[w_p R/(u_p A)][g+\mu_w g+\mu_w (u_p^2/R)(\pi/2)] \quad \cdots(3.4.4.7)$$

$$\Delta P_{SB}=(u_p^2/R)[w_p R/(u_p A)](R/u_p^2)[g+\mu_w\{g+(u_p^2/R)(\pi/2)\}] \quad \cdots(3.4.4.8)$$

$$\Delta P_{SB}=(w_p u_p/A)[g(R/u_p^2)+\mu_w\{g(R/u_p^2)+(R/u_p^2)(u_p^2/R)(\pi/2)\}] \quad \cdots(3.4.4.9)$$

$$\Delta P_{SB}=(w_p u_p/A)[(gR/u_p^2)+\mu_w\{(gR/u_p^2)+(\pi/2)\}] \quad \cdots(3.4.4.10)$$

一般式と等置する。

$$\zeta_{SB} I(\rho u^2/2)=(w_p u_p/A)[(gR/u_p^2)+\mu_w\{(gR/u_p^2)+(\pi/2)\}] \quad \cdots(3.4.4.11)$$

$$\zeta_{SB}=(w_p u_p/\Gamma \rho u^2 A)[(u^2/u_p^2)(2gR/u^2)+\mu_w(u^2/u_p^2)\{(2gR/u^2)+(u_p^2/u^2)\pi\}] \quad \cdots(3.4.4.12)$$

$$\zeta_{SB}=(w u_p/\rho u^2 A)[(u/u_p)^2(2/Fr_R^2)+\mu_w(u/u_p)^2\{(2/Fr_R^2)+(u_p/u)^2\pi\}] \quad [I \equiv w_p/w, Fr_R \equiv u^2/(gR)^{1/2}] \quad \cdots(3.4.4.13)$$

$$\zeta_{SB}=[\{(w/\rho)/(uA)\}(u_p/u)][(u_p/u)^{-2}(2/Fr_R^2)+\mu_w(u_p/u)^{-2}\{(2/Fr_R^2)+(u_p/u)^2\pi\}] \quad \cdots(3.4.4.14)$$

$$\zeta_{SB}=2/(\phi Fr_R^2)+(\mu_w/\phi)[(2/Fr_R^2)+\phi^2\pi] \quad [w/\rho=uA=Q, \phi=u_p/u] \quad \cdots(3.4.4.15)$$

$$\boxed{\zeta_{SB,1}=\mu_w[\phi\pi+2/(\phi Fr_R^2)]+2/(\phi Fr_R^2)} \quad (\text{水平から鉛直上向き}) \quad \cdots(3.4.4.16)$$

流れ方向の影響については、粒子群に作用する力の向きを考慮して次式となる。

$$\boxed{\zeta_{SB,2}=\mu_w[\phi\pi-2/(\phi Fr_R^2)]+2/(\phi Fr_R^2)} \quad (\text{鉛直上向きから水平}) \quad \cdots(3.4.4.17)$$

$$\boxed{\zeta_{SB,3}=\mu_w[\phi\pi+2/(\phi Fr_R^2)]-2/(\phi Fr_R^2)} \quad (\text{鉛直下向きから水平}) \quad \cdots(3.4.4.18)$$

$$\boxed{\zeta_{SB,4}=\mu_w[\phi\pi-2/(\phi Fr_R^2)]-2/(\phi Fr_R^2)} \quad (\text{水平から鉛直下向き}) \quad \cdots(3.4.4.19)$$

【計算例】固気二相流の圧力損失

平均粒子径 3 mm、粒子密度 1400 kg/m³、壁摩擦係数 0.4 の小麦を混合比 10、平均流速 20 m/s で空気輸送する。管路は 7B 鋼管を用いて水平方向に 12 m、鉛直上向き方向に 6 m、水平方向に 12 m の順からなり、半径比 12 の 90°ベンドを 2 個用いている。管路内における①加速時圧力損失 ΔP_{SA} [kPa]、②直管部の圧力損失 ΔP_{SF} [kPa]、③曲管部の圧力損失 ΔP_{SB} [kPa]、④付加圧力損失 ΔP_s [kPa]を求めよ。ただし、粒子の加速は水平管内で起こるものとし、加速中に進む距離は管長に対して十分に短いものとする。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s、重力加速度 9.81 m/s² とする。(①2.47 kPa, ②4.15 kPa, ③3.54 kPa, ④10.2 kPa)

$$\textcircled{1} u_t=[3g(\rho_p-\rho)D_p/\rho]^{1/2}=[(3)(9.81)(1400-1.20)(3 \times 10^{-3})/(1.20)]^{1/2}=10.144 \text{ m/s} (\text{Newton 域を仮定})$$

$$Re_p=D_p u_t \rho/\mu=(3 \times 10^{-3})(10.144)(1.20)/(18.2 \times 10^{-6})=2006 > 500 \quad \text{Newton 域の仮定は、正しい。}$$

$$\zeta_{SA}=(1.82-0.078u_t)\Gamma=[1.82-(0.078)(10.144)](10)=10.287$$

$$\Delta P_{SA}=\zeta_{SA}(\rho u^2/2)=(10.287)(1.20)(20)^2/2=2468.8 \text{ Pa} \doteq \boxed{2.47 \text{ kPa}}$$

$$\textcircled{2} D=D_o-2t_f=190.7-(2)(5.3)=180.1 \text{ mm}=0.1801 \text{ m}$$

$$Re=D u \rho/\mu=(0.1801)(20)(1.20)/(18.2 \times 10^{-6})=2.3749 \times 10^5$$

$$Fr=u/(gD)^{1/2}=20/[(9.81)(0.1801)]^{1/2}=15.046$$

$$\eta=0.0520 Fr^{1+(\epsilon/2.5)}=(0.0520)(15.046)^{1+(0/2.5)}=0.78239$$

$$\phi_h=1-(u_t/u)(\mu_w \cos \theta + \sin \theta)^{1/(2-\epsilon)}=1-(10.144/20)(0.4 \cos 0 + \sin 0)^{1/(2-0)}=1-(10.144/20)(0.4)^{1/2}=0.67921$$

$$\lambda_{SF,h}=1.5\eta(\kappa\Gamma/Re^\epsilon)[(1-\phi_h)/\phi_h]^{2-\epsilon}(D/D_p)^{1+\epsilon}(\rho/\rho_p)$$

$$=(1.5)(0.78239)(0.44)(10)/(2.3749 \times 10^5)^0[(1-0.67921)/0.67921]^{2-0}(180.1/3)^{1+0}(1.2/1400)=0.059271$$

$$\phi_v = 1 - (u_v/u)(\mu_w \cos \theta + \sin \theta)^{1/(2-\varepsilon)} = 1 - (10.144/20)(0.4 \cos 90^\circ + \sin 90^\circ)^{1/(2-0)} = 1 - (10.144/20)(1)^{1/2} = 0.4928$$

$$\lambda_{SF,v} = 1.5\eta(\kappa\Gamma/Re^\varepsilon)[(1 - \phi_v)/\phi_v]^{2-\varepsilon}(D/D_p)^{1+\varepsilon}(\rho/\rho_p)$$

$$= (1.5)(0.78239)(0.44)(10)/(2.3749 \times 10^5)^0 [(1 - 0.4928)/0.4928]^{2-0} (180.1/3)^{1+0} (1.2/1400) = 0.28146$$

$$\Delta P_{SF} = [\lambda_{SF,h}(\Sigma L_h/D) + \lambda_{SF,v}(\Sigma L_v/D)](\rho u^2/2) = [(0.059271)(24/0.1801) + (0.28146)(6/0.1801)](1.20)(20)^2/2 = 4146.0 \text{ Pa}$$

$$\doteq \boxed{4.15 \text{ kPa}}$$

$$\textcircled{3} R = (R/r)r = (R/r)(D/2) = (12)(0.1801/2) = 1.0806$$

$$Fr_R (= Fr_{R,2}) = u^2/(gR)^{1/2} = (20)^2/[(9.81)(1.0806)]^{1/2} = 122.85$$

$$\zeta_{SB,1} = \mu_w[\phi_v \pi + 2/(\phi_h Fr_{R,1}^2)] + 2/(\phi_h Fr_{R,1}^2) = (0.4)[(0.67921\pi) + 2/\{(0.67921)(122.85)^2\}] + 2/[(0.67921)(122.85)^2]$$

$$= 0.85379$$

$$\zeta_{SB,2} = \mu_w[\phi_v \pi - 2/(\phi_v Fr_{R,2}^2)] + 2/(\phi_v Fr_{R,2}^2) = (0.4)[(0.4928\pi) - 2/\{(0.4928)(122.85)^2\}] + 2/[(0.4928)(122.85)^2]$$

$$= 0.61943$$

$$\Sigma \zeta_{SB} = \zeta_{SB,1} + \zeta_{SB,2} = 0.85379 + 0.61943 = 1.4732$$

$$\Delta P_{SB} = \Sigma \zeta_{SB} \Gamma (\rho u^2/2) = (1.4732)(10)(1.20)(20)^2/2 = 3535.6 \text{ Pa} \doteq \boxed{3.54 \text{ kPa}}$$

$$\textcircled{4} \Delta P_S = \Delta P_{SA} + \Delta P_{SF} + \Delta P_{SB} = 2468.8 + 4146.0 + 3535.6 = 10150 \text{ Pa} \doteq \boxed{10.2 \text{ kPa}}$$

【問題】 固気二相流の圧力損失

- (1) 平均粒子径 3 mm、粒子密度 1400 kg/m³、壁摩擦係数 0.4 の小麦を混合比 20、平均流速 15 m/s で空気輸送する。管路は 7B 鋼管を用いて水平方向に 10 m、鉛直上向き方向に 10 m、水平方向に 10 m の順からなり、半径比 12 の 90°ベンドを 2 個用いている。管路内における①加速時圧力損失 ΔP_{SA} [kPa]、②直管部の圧力損失 ΔP_{SF} [kPa]、③曲管部の圧力損失 ΔP_{SB} [kPa]、④付加圧力損失 ΔP_S [kPa]を求めよ。ただし、粒子の加速は水平管内で起こるものとし、加速中に進む距離は管長に対して十分に短いものとする。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ 、重力加速度 9.81 m/s² とする。(①2.78 kPa, ②1.64 kPa, ③3.04 kPa, ④22.2 kPa)
- (2) 平均粒子径 7 mm、粒子密度 1200 kg/m³、壁摩擦係数 0.3 の大豆を混合比 12、平均流速 20 m/s で空気輸送する。管路は 8B 鋼管を用いて水平方向に 20 m、鉛直上向き方向に 5 m、水平方向に 15 m の順からなり、半径比 12 の 90°ベンドを 2 個用いている。管路内における①加速時圧力損失 ΔP_{SA} [kPa]、②直管部の圧力損失 ΔP_{SF} [kPa]、③曲管部の圧力損失 ΔP_{SB} [kPa]、④付加圧力損失 ΔP_S [kPa]を求めよ。ただし、粒子の加速は水平管内で起こるものとし、加速中に進む距離は管長に対して十分に短いものとする。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ 、重力加速度 9.81 m/s² とする。(①2.01 kPa, ②9.33 kPa, ③2.42 kPa, ④13.8 kPa)

3. 5 輸送空気速度

3.5.1 サルテーション速度

水平管内において浮遊流の状態から空気流速を下げると、やがて摺動流の状態に変化する。浮遊流と摺動流の境界となる空気速度をサルテーション速度といい、この速度の近傍において圧力損失が極小となる。理論的なサルテーション速度 u_s [m/s]は、次式のように導かれる。[文献 24, 25]

$$\Delta P_{SF} = \eta N R_f / A \quad \cdots (3.5.1.1)$$

$$\Delta P_{SF}=0.0520Fr^{1+(\varepsilon/2.5)}[(\rho_{pf}-\rho)AL/\{(\pi/6)D_p^3\rho_p\}][(\pi/6)D_p^3\rho_pg(u-u_p)^{2-\varepsilon}/u_t^{2-\varepsilon}]/A \quad \cdots(3.5.1.2)$$

$$\Delta P_{SF}/L=0.0520[u/(gD)^{0.5}]^{1+(\varepsilon/2.5)}[\{1+(\Gamma/\phi)\}\rho-\rho][gu^{2-\varepsilon}\{1-(u_p/u)\}^{2-\varepsilon}/u_t^{2-\varepsilon}] \quad \cdots(3.5.1.3)$$

$$\Delta P_{SF}/L=0.0520[u/(gD)^{0.5}]^{1+(\varepsilon/2.5)}\Gamma\rho g(u/u_t)^{2-\varepsilon}[(1-\phi)^{2-\varepsilon}/\phi] \quad \cdots(3.5.1.4)$$

$$\Delta P_{SF}/L=0.0520[u/(gD)^{0.5}]^{1+(\varepsilon/2.5)}\Gamma\rho g(u/u_t)^{2-\varepsilon}[\{(u_t/u)(\mu_w\cos\theta+\sin\theta)^{1/(2-\varepsilon)}\}^{2-\varepsilon}/\{1-(u_t/u)(\mu_w\cos\theta+\sin\theta)^{1/(2-\varepsilon)}\}] \quad \cdots(3.5.1.5)$$

$$\Delta P_{SF}/L=Y u^{1+(\varepsilon/2.5)}[X^{2-\varepsilon}/\{1-(u_t/u)X\}] \quad [X\equiv(\mu_w\cos\theta+\sin\theta)^{1/(2-\varepsilon)}, Y\equiv 0.0520\{1/(gD)^{0.5}\}^{1+(\varepsilon/2.5)}\Gamma\rho g] \quad \cdots(3.5.1.6)$$

$$\Delta P_{SF}/L=Y X^{2-\varepsilon}[u^{2+(\varepsilon/2.5)}/(u-u_tX)] \quad \cdots(3.5.1.7)$$

$$d(\Delta P_{SF}/L)/du=Y X^{2-\varepsilon}[\{2+(\varepsilon/2.5)\}u_s^{1+(\varepsilon/2.5)}(u_s-u_tX) - u_s^{2+(\varepsilon/2.5)}(1)]/(u_s-u_tX)^2=0 \quad \cdots(3.5.1.8)$$

$$[2+(\varepsilon/2.5)]u_s^{1+(\varepsilon/2.5)}(u_s-u_tX) - u_s^{2+(\varepsilon/2.5)}=0 \quad \cdots(3.5.1.9)$$

$$[2+(\varepsilon/2.5)](u_s-u_tX) - u_s=0 \quad \cdots(3.5.1.10)$$

$$[1+(\varepsilon/2.5)]u_s - [2+(\varepsilon/2.5)]u_tX=0 \quad \cdots(3.5.1.11)$$

$$u_s=[2+(\varepsilon/2.5)]u_tX/[1+(\varepsilon/2.5)] \quad \cdots(3.5.1.12)$$

$$u_s=[\{2+(\varepsilon/2.5)\}/\{1+(\varepsilon/2.5)\}]u_t(\mu_w\cos\theta+\sin\theta)^{1/(2-\varepsilon)} \quad \cdots(3.5.1.13)$$

$$u_s=[\{2+(\varepsilon/2.5)\}/\{1+(\varepsilon/2.5)\}]u^* \quad \cdots(3.5.1.14)$$

ただし、 u^* は最小輸送速度[m/s]。

3.5.2 最小輸送速度

水平管内において摺動流の状態から空気流速を下げると、やがて管底への粒子沈積が起こる。この状態を閉塞限界といい、このときの空気速度を最小輸送速度という。これよりも空気速度を下げると、管路内で閉塞が起こって圧力損失が急激に増大する。理論的な最小輸送速度 u^* [m/s]は、輸送中の粒子速度 u_p [m/s]を 0 とおくことで導かれる。

$$0=1-(u_t/u^*)(\mu_w\cos\theta+\sin\theta)^{1/(2-\varepsilon)} \quad \cdots(3.5.2.1)$$

$$u^*=u_t(\mu_w\cos\theta+\sin\theta)^{1/(2-\varepsilon)} \quad \cdots(3.5.2.2)$$

【計算例】輸送空気速度

平均粒子径 3 mm、粒子密度 1400 kg/m³、壁摩擦係数 0.4 の小麦を斜め上向き 45°の方向に空気輸送するときの①最小輸送速度 u^* [m/s]、②サルテーション速度 u_s [m/s]を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s、重力加速度 9.81 m/s²とする。(①10.1 m/s, ②20.2 m/s)

$$u_t=[3g(\rho_p-\rho)D_p/\rho]^{1/2}=[(3)(9.81)(1400-1.20)(3\times 10^{-3})/(1.20)]^{1/2}=10.144 \text{ m/s (Newton 域を仮定)}$$

$$Re_p=D_p u_t \rho/\mu=(3\times 10^{-3})(10.144)(1.20)/(18.2\times 10^{-6})=2006>500 \quad \text{Newton 域の仮定は、正しい。}$$

$$u^*=u_t(\mu_w\cos\theta+\sin\theta)^{1/(2-\varepsilon)}=(10.144)(0.4\cos 45+\sin 45)^{1/(2-0)}=10.092 \text{ m/s} \doteq \boxed{10.1 \text{ m/s}}$$

$$u_s=[\{2+(\varepsilon/2.5)\}/\{1+(\varepsilon/2.5)\}]u^*=[\{2+(0/2.5)\}/\{1+(0/2.5)\}](10.092)=20.184 \text{ m/s} \doteq \boxed{20.2 \text{ m/s}}$$

【問題】輸送空気速度

- (1) 平均粒子径 3 mm、粒子密度 1400 kg/m³、壁摩擦係数 0.4 の小麦を水平に空気輸送するときの①最小輸送速度 u^* [m/s]、②サルテーション速度 u_s [m/s]を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s、重力加速度 9.81 m/s²とする。(①6.42 m/s, ②12.8 m/s)

- (2) 平均粒子径 3 mm、粒子密度 1400 kg/m³、壁摩擦係数 0.4 の小麦を垂直に空気輸送するときの①最小輸送速度 u^* [m/s]、②サルテーション速度 u_s [m/s]を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m³、粘度 18.2 μPa·s、重力加速度 9.81 m/s² とする。(①10.1 m/s, ②20.3 m/s)

3. 6 空気輸送装置の設計

ここでは、吸引式および低圧圧送式に適用することを考える。

①**輸送空気速度** 輸送空気速度 u [m/s]は、経験的に 15~45 m/s 程度が多い。ここでは選定基準として、圧力損失の極小値に近いサルテーション速度 u_s [m/s]を用いる。ただし、用いる輸送管の傾斜角によって変化するため、それぞれの角度に対して計算しておき、それらの内の最大値を採用する。

$$u_s = \left\{ \frac{2 + (\varepsilon/2.5)}{1 + (\varepsilon/2.5)} \right\} u^* \quad \cdots(3.6.1)$$

$$u^* = u_t (\mu_w \cos\theta + \sin\theta)^{1/(2-\varepsilon)} \quad \cdots(3.6.2)$$

ただし、 u_t は終末速度[m/s]、 u^* は最小輸送速度[m/s]、 μ_w は壁摩擦係数[-]、 ε は定数(輸送物が粉体のとき 1、粒体のとき 0)、 θ は輸送管の傾斜角[deg.]。

②**輸送空気量** 輸送空気量 Q [m³/s]は、混合比 Γ [-]の定義式より導かれる。

$$\Gamma \equiv w_p/w \quad \cdots(3.6.3)$$

$$\Gamma = w_p/(\rho Q) \quad \cdots(3.6.4)$$

$$Q = w_p/(\Gamma\rho) \quad \cdots(3.6.5)$$

ただし、 w は空気の質量流量[kg/s]、 w_p は固体の質量流量[kg/s] (輸送性能に相当)、 ρ は空気密度[kg/m³]。

③**輸送管径** 輸送管の内径 D [m](=外径 $D_o - 2 \times$ 肉厚 t_r)は、輸送空気量 Q [m³/s]の式より導かれる。計算値に近い管の呼びを JIS 表より選定する。仕様の管径にあわせて輸送空気量を修正する。

$$Q = uS \quad \cdots(3.6.6)$$

$$Q = u(\pi D^2/4) \quad \cdots(3.6.7)$$

$$D = [4Q/(\pi u)]^{1/2} \quad \cdots(3.6.8)$$

ただし、 S は流路断面積[m²]、 u は輸送管内の平均流速[m/s]。

④**輸送空気圧** 輸送空気圧 P_a [Pa]は、輸送装置内における各圧力損失の総和で与えられる。実用上は、5%程度の余裕を見込む(計算値に 1.05 を乗じた空気圧を用いる)。

$$P_a = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_4 + \Delta P_5 + \Delta P_6 + \Delta P_7 + \Delta P_8 + \Delta P_9 \quad \cdots(3.6.9)$$

ただし、 ΔP_1 は空気取入れ口の圧力損失[Pa]、 ΔP_2 は空気フィルターの圧力損失[Pa]、 ΔP_3 は空気管内の圧力損失[Pa]、 ΔP_4 は輸送物の加速に伴う輸送管内の粉体流圧力損失[Pa]、 ΔP_5 は定常輸送時の粉体流圧力損失[Pa]、 ΔP_6 は集塵機の圧力損失[Pa]、 ΔP_7 は排気管内の圧力損失[Pa]、 ΔP_8 は排気管出口の圧力損失[Pa]、 ΔP_9 は背圧[Pa] (排気管を出た空気が持っている圧力)。

空気取入れ口の圧力損失 ΔP_1 [Pa]は、次式で与えられる。

$$\Delta P_1 = K_1(\rho u_1^2/2) \quad \cdots(3.6.10)$$

$$u_1 = 4Q/(\pi D_a^2) \quad \cdots(3.6.11)$$

ただし、 D_a は空気管径[m]であり、圧損低減のため輸送管径 D [m]よりもひとまわり大きい呼び径のものを用いる。 K_1 は損失係数[-]であり、取り入れ口の形状に応じて 0.1~0.8 の間の値を取る。とくに指定がない場合は、安全を見込んで 0.8 にしておく。

空気フィルターの圧力損失 ΔP_2 [Pa]は、200~400 Pa 程度を見積もる。とくに指定がない場合は、安全を見込んで 400 Pa にしておく。

空気管内の圧力損失 ΔP_3 [Pa]は、ファニング式を用いる。

$$\Delta P_3 = 4f(L_3/D_a)(\rho u_3^2/2) \quad \dots(3.6.12)$$

$$u_3 = 4Q/(\pi D_a^2) \quad \dots(3.6.13)$$

ただし、 L_3 は圧送式の場合は空気源機械(コンプレッサーなど)と粉粒体供給機(フィーダー)の区間の相当長さ[m]、吸引式の場合は空気取入れ口と粉粒体供給機の区間の相当長さ[m]。

輸送物の加速に伴う輸送管内の粉体流圧力損失 ΔP_4 [Pa]は、次式で与えられる。

$$\Delta P_4 = (C + \Gamma)(\rho u^2/2) \quad \dots(3.6.14)$$

C は輸送方式に関する因子(圧送式の場合 1, 吸引式の場合 10)、 u は輸送空気速度[m/s]。[文献 26, 27]

定常輸送時の粉体流圧力損失 ΔP_5 [Pa]は、空気流の圧力損失 ΔP_G [Pa]に圧力損失比 α を乗じる。

$$\Delta P_5 = \alpha \Delta P_G \quad \dots(3.6.15)$$

$$\alpha = 1 + \beta \Gamma \quad \dots(3.6.16)$$

ただし、 β は輸送物の性状に関する係数であり、多くの場合 0.4~0.6 程度である。[文献 26, 28]

とくに指定がない場合は、安全を見込んで 0.6 にしておく。

空気流の圧力損失 ΔP_G [Pa]は、ファニング式を用いる。

$$\Delta P_G = 4f(L_5/D)(\rho u^2/2) \quad \dots(3.6.17)$$

$$L_5 = L_h + kL_v + \delta D(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)/90 \quad \dots(3.6.18)$$

$$k = 1 + 0.08\Gamma \quad \dots(3.6.19)$$

$$\delta = 70 + 2\Gamma \quad \dots(3.6.20)$$

ただし、 D は輸送管径[m]、 k と δ は実験定数、 L_5 は管路の相当長さ[m]、 L_h は管路の水平距離[m]、 L_v は管路の垂直距離[m]、 u は輸送空気速度[m/s]、 θ はベンドの曲がり角[deg.]、添え字 n はベンドの数。

管路の急な拡大または縮小、ベンド以外の挿入物が含まれる場合は、その分も相当長さを含める。

集塵機の圧力損失 ΔP_6 [Pa]は、サイクロンを用いるものとして次式となる。

$$\Delta P_6 = K_6(\rho u_6^2/2) \quad \dots(3.6.21)$$

$$K_6 = (30BH/D_E^2)[D_T/(L_1 + L_2)]^{0.5} \quad \dots(3.6.22)$$

ただし、 K_6 は損失係数[-]、 Q は輸送空気量[m³/s]、 u_6 は入口流速[m/s](便宜上、輸送空気速度と同じにする)。サイクロンの各寸法は図を参照。

装置本体径 D_T [m]は、次式のように導かれる。

$$Q = u_6 S \quad \dots(3.6.23)$$

$$Q = u_6 B H \quad \dots(3.6.24)$$

$$Q = u_6 (B/D_T)(H/D_T)D_T^2 \quad \dots(3.6.25)$$

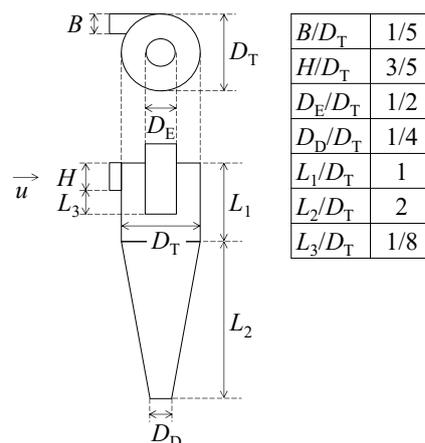
$$D_T = [Q / \{(B/D_T)(H/D_T)u_6\}]^{0.5} \quad \dots(3.6.26)$$

排気管内の圧力損失 ΔP_7 [Pa]は、空気管内の圧力損失と同程度とする。

排気管出口の圧力損失 ΔP_8 [Pa]は、次式を用いる。

$$\Delta P_8 = K_8(\rho u_8^2/2) \quad \dots(3.6.27)$$

$$u_8 = 4Q/(\pi D_d^2) \quad \dots(3.6.28)$$



ただし、 D_d は排気管径[m]であり、空气管径と同程度とする。 K_8 は排気管出口の損失係数[-]であり、集塵機の損失係数と同程度とする。

⑤輸送所要動力 空気源機械の輸送所要動力 E [kW]は、次式で与えられる。

$$E=QP_a/(1000\eta_M) \quad \cdots(3.6.29)$$

ただし、 η_M は機械効率[-](=0.6~0.75)。

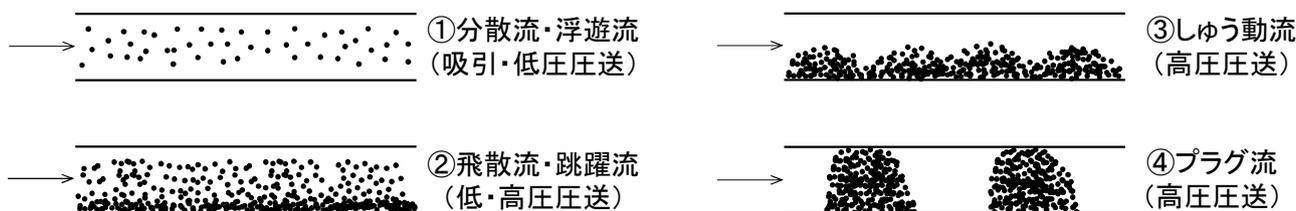


図 3.6.1 管路内における固気混相流動状態
(①~④の順に空気圧と固体濃度が大きくなる)

表 3.6.1 空気輸送方式と輸送状態 [文献 29]

輸送方式	固体濃度	輸送状態	輸送圧力[Pa]	輸送速度[m/s]	混合比
吸引式 低圧圧送式	低	分散流・浮遊流	$0.1\sim 0.2\times 10^5$	15~30	0.1~10
		飛散流・跳躍流 (管底に密)	$0.2\sim 0.5\times 10^5$	15~30	5~15
			$0.4\sim 4\times 10^5$	15~30	7~50
高圧圧送式	高	しゅう動流	$2.5\sim 7\times 10^5$	5~15	40~150
		プラグ流	$2.5\sim 7\times 10^5$	1~10	50~300

表 3.6.2 配管用炭素鋼鋼管 (JIS G3452) [文献 30]

呼び径		外径 [mm]	厚さ [mm]	呼び径		外径 [mm]	厚さ [mm]
A	B			A	B		
6	1/8	10.5	2.0	80	3	89.1	4.2
8	1/4	13.8	2.3	90	3 1/2	101.6	4.2
10	3/8	17.3	2.3	100	4	114.3	4.5
15	1/2	21.7	2.8	125	5	139.8	4.5
20	3/4	27.2	2.8	150	6	165.2	5.0
25	1	34.0	3.2	175	7	190.7	5.3
32	1 1/4	42.7	3.5	200	8	216.3	5.8
40	1 1/2	48.6	3.5	225	9	241.8	6.2
50	2	60.5	3.8	250	10	267.4	6.6
65	2 1/2	76.3	4.2	300	12	318.5	6.9

3. 7 設計計算

装置形式	低圧圧送式	空気密度	1.20 kg/m ³
輸送物の種類	小麦	空気粘度	18.2×10^{-6} Pa·s
輸送物の粒子密度	1400 kg/m ³	輸送量	27 t/h
輸送物の平均粒子径	3 mm	混合比	12
輸送物の壁摩擦係数	0.4	重力加速度	9.81 m/s ²

定常輸送時の水平管長	40 m	曲がり管の数	2
定常輸送時の鉛直管長	20 m	β 値	0.4
空気源機械－供給機間の相当長さ	10 m	集塵機の種類	標準型サイクロン
曲がり管の種類	90°円形バンド	背圧	500 Pa
曲がり管の半径比	12	空気源機械効率	0.6

①輸送空気速度

$$u_t = [3g(\rho_p - \rho)D_p/\rho]^{1/2} = [(3)(9.81)(1400 - 1.20)(3 \times 10^{-3})/(1.20)]^{1/2} = 10.144 \text{ m/s (Newton 域を仮定)}$$

$$Re_p = D_p u_t \rho / \mu = (3 \times 10^{-3})(10.144)(1.20)/(18.2 \times 10^{-6}) = 2006 > 500 \quad \text{Newton 域の仮定は、正しい。}$$

$$(\text{水平管}) u_{h,*} = u_t (\mu_w \cos \theta + \sin \theta)^{1/(2-\epsilon)} = (10.144)(0.4 \cos 0 + \sin 0)^{1/(2-0)} = 6.4156 \text{ m/s} \doteq 6.42 \text{ m/s}$$

$$(\text{水平管}) u_{s,h} = [2 + (\epsilon/2.5)] / [1 + (\epsilon/2.5)] u_{h,*} = [2 + (0/2.5)] / [1 + (0/2.5)] (6.4156) = 12.831 \text{ m/s} \doteq 12.8 \text{ m/s}$$

$$(\text{鉛直管}) u_{v,*} = u_t (\mu_w \cos \theta + \sin \theta)^{1/(2-\epsilon)} = (10.144)(0.4 \cos 90 + \sin 90)^{1/(2-0)} = 10.144 \text{ m/s} \doteq 10.1 \text{ m/s}$$

$$(\text{鉛直管}) u_{s,v} = [2 + (\epsilon/2.5)] / [1 + (\epsilon/2.5)] u_{v,*} = [2 + (0/2.5)] / [1 + (0/2.5)] (10.144) = 20.288 \text{ m/s} \doteq \boxed{20.3 \text{ m/s}} \quad \text{採用}$$

②輸送空気量

$$w_p = (27)(10^3)/(60^2) = 7.5 \text{ kg/s}$$

$$Q = w_p / (\Gamma \rho) = (7.5) / [(12)(1.20)] = 0.52083 \text{ m}^3/\text{s} \doteq 0.521 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{修正後 } \boxed{0.517 \text{ m}^3/\text{s}})$$

③輸送管径

$$D = [4Q/(\pi u)]^{1/2} = [(4)(0.52083)/(20.3\pi)]^{1/2} \doteq 0.18074 \text{ m}$$

$$D = D_o - 2t_f = 190.7 - (2)(5.3) = 180.1 \text{ mm} = \boxed{0.1801 \text{ m}} \quad (7B)$$

$$Q (=uS) = (20.3)[\pi(0.1801)^2/4] = 0.51714 \text{ m}^3/\text{s} \doteq 0.517 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{修正値})$$

④輸送空気圧

(1) 空気取入れ口の圧力損失

$$D_a = D_o - 2t_f = 216.3 - (2)(5.8) = 204.7 \text{ mm} = 0.2047 \text{ m} \quad (8B)$$

$$u_1 = 4Q/(\pi D_a^2) = (4)(0.517)/[\pi(0.2047)^2] = 15.709 \text{ m/s}$$

$$\Delta P_1 = K_1(\rho u_1^2/2) = (0.8)(1.20)(15.709)^2/2 = 118.45 \text{ Pa}$$

(2) 空気フィルターの圧力損失

$$\Delta P_2 = 400 \text{ Pa}$$

(3) 空気管内の圧力損失

$$u_3 (=u_1) = 15.709 \text{ m/s}$$

$$Re = D u_3 \rho / \mu = (0.2047)(15.709)(1.20)/(18.2 \times 10^{-6}) = 2.1201 \times 10^5$$

$$f = 0.0008 + 0.05525 Re^{-0.237} = 0.0008 + (0.05525)(2.1201 \times 10^5)^{-0.237} = 0.0038198$$

$$\Delta P_3 = 4f(L_3/D_a)(\rho u_3^2/2) = (4)(0.0038198)(10/0.2047)(1.20)(15.709)^2/2 = 110.51 \text{ Pa}$$

(4) 加速時の圧力損失

$$\Delta P_4 = (C + \Gamma)(\rho u^2/2) = (1 + 12)(1.20)(20.3)^2/2 = 3214.3 \text{ Pa}$$

(5) 定常輸送時の圧力損失

$$k = 1 + 0.08\Gamma = 1 + (0.08)(12) = 1.96$$

$$\delta = 70 + 2\Gamma = 70 + (2)(12) = 94$$

$$L_5 = L_h + kL_v + \delta D(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)/90 = 40 + (1.96)(20) + (94)(0.1801)(90 + 90)/90 = 113.05 \text{ m}$$

$$Re = Dup/\mu = (0.1801)(20.3)(1.20)/(18.2 \times 10^{-6}) = 2.4105 \times 10^5$$

$$f = 0.0008 + 0.05525 Re^{-0.237} = 0.0008 + (0.05525)(2.4105 \times 10^5)^{-0.237} = 0.0037293$$

$$\Delta P_G = 4f(L_5/D)(\rho u^2/2) = (4)(0.0037293)(113.05/0.1801)(1.20)(20.3)^2/2 = 2315.1 \text{ Pa}$$

$$\alpha = 1 + \beta f = 1 + (0.4)(12) = 5.8$$

$$\Delta P_5 = \alpha \Delta P_G = (5.8)(2315.1) = 13427 \text{ Pa}$$

(6)集塵機の圧力損失

$$D_T = [Q/\{(B/D_T)(H/D_T)u_6\}]^{0.5} = [(0.517)/\{(1/5)(3/5)(20.3)\}]^{0.5} = 0.46068 \text{ m } (u_6 = u)$$

$$B = (B/D_T)D_T = (1/5)(0.46068) = 0.092136 \text{ m}$$

$$H = (H/D_T)D_T = (3/5)(0.46068) = 0.27640 \text{ m}$$

$$D_E = (D_E/D_T)D_T = (1/2)(0.46068) = 0.23034 \text{ m}$$

$$L_1 = (L_1/D_T)D_T = (1)(0.46068) = 0.46068 \text{ m}$$

$$L_2 = (L_2/D_T)D_T = (2)(0.46068) = 0.92136 \text{ m}$$

$$K_6 = (30BH/D_E^2)[D_T/(L_1+L_2)]^{0.5} = [(30)(0.092136)(0.27640)/(0.23034)^2][(0.46068)/(0.46068+0.92136)]^{0.5} = 8.3136$$

$$\Delta P_6 = K_6(\rho u_6^2/2) = (8.3136)(1.20)(20.3)^2/2 = 2055.5 \text{ Pa}$$

(7)排気管内の圧力損失

$$\Delta P_7 (\doteq \Delta P_3) = 110.51 \text{ Pa}$$

(8)排気管出口の圧力損失

$$u_8 = 4Q/(\pi D_d^2) = (4)(0.517)/[\pi(0.2047)^2] = 15.709 \text{ m/s } (D_d \doteq D_a)$$

$$\Delta P_8 = K_8(\rho u_8^2/2) = (8.3136)(1.20)(15.709)^2/2 = 1230.9 \text{ Pa } (K_8 \doteq K_6)$$

(9)背圧

$$\Delta P_9 = 500 \text{ Pa}$$

(10)輸送空気圧

$$P_a = (1.05)(\Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_4 + \Delta P_5 + \Delta P_6 + \Delta P_7 + \Delta P_8 + \Delta P_9)$$

$$= (1.05)(118.45 + 400 + 110.51 + 3214.3 + 13427 + 2055.5 + 110.51 + 1230.9 + 500) = 22225 \text{ Pa} \doteq \boxed{2.22 \text{ kPa}} \text{ (余裕 5\%)}$$

⑤輸送所要動力

$$E = QP_a/(1000\eta_M) = (0.517)(22225)/[(1000)(0.6)] = 19.150 \text{ kW} \doteq \boxed{19.2 \text{ kW}}$$

参考文献

- [1] JIS B 8805-1992
- [2] 小玉正雄, 石川義雄; 機械設計法(巻掛け伝動装置・コンベヤ), 産業図書(1964)6.5章
- [3] 林 恒美; 粉体技術ポケットブック, 工業調査会(1996)9.1章
- [4] 柴田 力; 粉粒体精密供給技術, アイシーピー(1986)3.5章
- [5] 日本粉体工業技術協会編; 粉粒体のバルクハンドリング技術, 日刊工業新聞社(1985)p.238
- [6] 林 恒美; 粉体技術ポケットブック, 工業調査会(1996)8.1章
- [7] 狩野 武; 粉体輸送技術, 日刊工業新聞社(1991)p.169
- [8] 真島卯太郎; コンベヤ計算法, 工学図書(1970)p.302
- [9] 国行一郎(編); 荷役機械工学便覧 改訂3版, コロナ社(1970)pp.229-232
- [10] 真島卯太郎; チェーン・コンベヤ 改訂版, 工学図書(1982)p.100
- [11] 真島卯太郎; コンベヤ計算法, 工学図書(1970)4.2章
- [12] 林 恒美; 粉体技術ポケットブック, 工業調査会(1996)9.2章
- [13] 森川敬信; 流体-固体二相流, 日刊工業新聞社(1979)3.1章

- [14] 狩野 武; 粉粒体輸送装置, 日刊工業新聞社(1969)4章
- [15] 狩野 武; 粉粒体輸送技術, 日刊工業新聞社(1991)6.5章
- [16] J.A. Hitchcock and C. Jones; *Brit. J. Appl. Phys.*, **9**(1958)218-222
- [17] S. Matsumoto, H. Harakawa, S. Suzuki and S. Ohtani; *Int. J. Multiphase Flow*, **12**(1986)445-458
- [18] 化学工学協会(編); 化学工学便覧 改訂五版, 丸善(1988)5.2.3章
- [19] 伊藤英覚; 機械学会誌, **62** (1959)1634-1643
- [20] 森川敬信; 粉体工学会誌, **15** (1978)330-335
- [21] 狩野武; 粉粒体輸送装置, 日刊工業新聞社(1969)p.91
- [22] 森川敬信; 流体-固体二相流, 日刊工業新聞社(1979)5.1章
- [23] 富田侑嗣; 粉体工学会誌, **23** (1986)592-598
- [24] 狩野 武; 粉粒体輸送装置, 日刊工業新聞社(1969)4章
- [25] 狩野 武; 粉粒体輸送技術, 日刊工業新聞社(1991)6.5章
- [26] 植松時雄, 池森亀鶴, 森芳郎, 伊藤四郎(編); 流体固体輸送工学ハンドブック, 朝倉書店(1966)p.441
- [27] 白戸紋平; 化学工学 機械的単位操作の基礎, 丸善(1980)p.86
- [28] 狩野 武; 粉粒体輸送技術, 日刊工業新聞社(1991)6.3章
- [29] 日本粉体工業技術協会編; 粉粒体のバルクハンドリング技術, 日刊工業新聞社(1985)p.269
- [30] JIS G3452

令和6年5月10日作成

粉 砕

固体粒子に圧縮やせん断などの機械的な衝撃を与えて細分化する単位操作を**粉砕**(size reduction, comminution)という。原料である砕料を細分化することで表面積を大きく取れることから、反応や物質移動の速度が増大する。また、有用金属が含まれる鉱石を破砕する場合は、製品である砕成物中に有用金属が濃縮されることから、分離操作としての側面もある。なお、同じ粉砕でもセンチ～ミリサイズに細分化される場合は**破砕**(crushing)、ミリ～マイクロンサイズに細分化される場合は**粉砕**または**微粉砕**(grinding)と呼ばれる。

1. 破壊現象

1. 1 理論強度

欠陥をまったく含まない完全固体の破壊は、原子間または分子間結合の切断に相当する。いま、隣接する原子どうしは互いに引力と斥力を及ぼし合っており、格子定数 a [m]の距離で平衡に保たれているものとする。合力としての原子間相互作用力 σ [N/m²]は、近似的に次の正弦曲線式で表される。[文献 1-4]

$$\sigma = \sigma_{\text{th}} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad \cdots(1.1.1)$$

ただし、 λ は波長[m]、 σ_{th} は理論的破壊強度[N/m²]。

単位面積あたりの結合分離エネルギー W [J/m²]は、合力曲線と横軸で囲まれる面積に相当する。

$$W = \int_0^{\lambda/2} \sigma_{\text{th}} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} dx \quad \cdots(1.1.2)$$

$$W = -\sigma_{\text{th}} \frac{\lambda}{2\pi} \left[\cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right]_0^{\lambda/2} \quad \cdots(1.1.3)$$

$$W = -\sigma_{\text{th}} \frac{\lambda}{2\pi} (\cos \pi - \cos 0) \quad \cdots(1.1.4)$$

$$W = -\sigma_{\text{th}} \frac{\lambda}{2\pi} (-1 - 1) \quad \cdots(1.1.5)$$

$$\boxed{W = \frac{\lambda \sigma_{\text{th}}}{\pi}} \quad \cdots(1.1.6)$$

上式は、結合分離によって新たな面を生成するのに必要となる界面エネルギー 2γ [J/m²]に等しい(2の倍数は生成した一対の面を表す)。波長 λ [m]は、次式のように導かれる。

$$2\gamma = \frac{\lambda \sigma_{\text{th}}}{\pi} \quad \cdots(1.1.7)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\gamma}{\sigma_{\text{th}}}} \quad \cdots(1.1.8)$$

原子間相互作用力 σ [N/m²]は、原点近傍では次式のように近似される。

$$\sigma \approx \sigma_{th} \frac{2\pi x}{\lambda} \quad \dots(1.1.9)$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_{th}^2 x}{\gamma}} \quad \left[\lambda \equiv \frac{2\pi\gamma}{\sigma_{th}} \right] \quad \dots(1.1.10)$$

原子間に引張荷重 P [N]が作用したとき、原子間距離が x [m]だけ変位した(伸びた)とする。このときのひずみ ε [-]は、次式で表される。

$$\varepsilon = \frac{x}{a} \quad \dots(1.1.11)$$

変位量 x は、フックの法則より引張荷重 P [N]に比例する。

$$P = kx \quad \dots(1.1.12)$$

$$P = k\varepsilon a \quad \left[\varepsilon \equiv \frac{x}{a} \right] \quad \dots(1.1.13)$$

原子間相互作用力 σ [N/m²]は、次式のように導かれる。

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \dots(1.1.14)$$

$$\sigma = \frac{k\varepsilon a}{A} \quad [P \equiv k\varepsilon a] \quad \dots(1.1.15)$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad \left[E \equiv \frac{ka}{A} \right] \quad \dots(1.1.16)$$

ただし、 E はヤング率[N/m²]。

原点近傍における原子間相互作用力 σ と等置すると、理論的破壊強度 σ_{th} [N/m²]が導かれる。

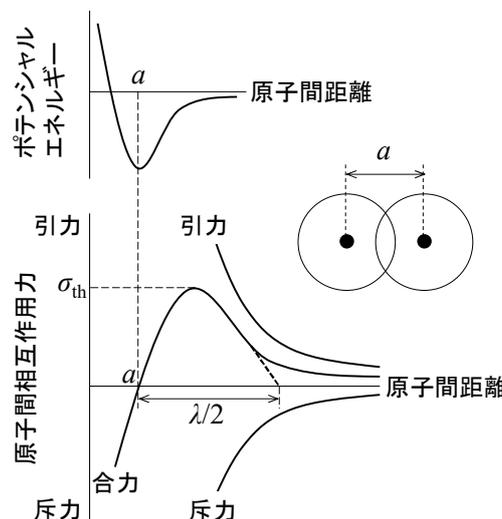
$$\frac{\sigma_{th}^2 x}{\gamma} = E\varepsilon \quad \dots(1.1.17)$$

$$\sigma_{th} = \sqrt{\frac{E\gamma\varepsilon}{x}} \quad \dots(1.1.18)$$

$$\boxed{\sigma_{th} = \sqrt{\frac{E\gamma}{a}}} \quad \left[\varepsilon \equiv \frac{x}{a} \right] \quad \dots(1.1.19)$$

多くの場合、ひずみ ε が 10~20%に達したときに結合分離に伴う破壊が起こることから、上式は経験的に次式で近似される。

$$\sigma_{th} \approx 0.1E \quad \dots(1.1.20)$$



1. 2 実際強度

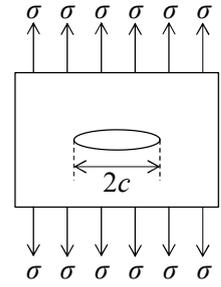
実際の材料は完全な固体ではなく欠陥が存在するため、理論的破壊強度は実測の値と合致しない。Griffith は材料内部に微小なき裂を仮定し(グリフィスクラック)、き裂の進展に伴う弾性ひずみエネルギーの解放と表面エネルギー増大の均衡を考察することで、実際材料の破壊強度を導いた。いま、幅 $2c$ [m] のき裂を含む脆性材料(長さ L [m]、断面積 A [m²])が引張荷重 P [N]を受けて x [m]だけ伸びているとき、材料に蓄えられている体積当たりの弾性ひずみエネルギー U_V [J/m³]は次式のように導かれる。[文献 3-7]

$$U = \frac{1}{2} Px \quad \cdots(1.2.1)$$

$$U = \frac{1}{2}(\sigma A)(\varepsilon L) \quad \left[\sigma = \frac{P}{A}, \varepsilon = \frac{x}{a} \right] \quad \cdots(1.2.2)$$

$$U = \frac{\sigma^2 AL}{2E} \quad [\sigma = E\varepsilon] \quad \cdots(1.2.3)$$

$$\boxed{U_v = \frac{\sigma^2}{2E}} \quad \cdots(1.2.4)$$



実際には、この2倍になることが知られている。

き裂がもつ長さ当たりの表面エネルギー W [J/m] は、次式で表される。

$$W = 2(2c\gamma) = 4c\gamma \quad \cdots(1.2.5)$$

ただし、 γ はき裂がもつ面積当たりの表面エネルギー [J/m²]。

き裂が進展すると、弾性ひずみエネルギーは減少し、表面エネルギーは増大する ($dU_v/dc < 0$, $dW/dc > 0$)。き裂進展前後のエネルギー変化 ΔG [J/m] は、これらの和で表される。

$$\Delta G = -(2U_v)\pi c^2 + W \quad \cdots(1.2.6)$$

$$\Delta G = -\frac{\pi\sigma^2 c^2}{E} + 4c\gamma \quad \cdots(1.2.7)$$

き裂の進展 (材料の破壊) が開始される条件を用いると、破壊強度 σ [N/m²] は次式のように導かれる。

$$\frac{d(\Delta G)}{dc} = 0 \quad \cdots(1.2.8)$$

$$\frac{d}{dc} \left(-\frac{\pi\sigma^2 c^2}{E} + 4c\gamma \right) = 0 \quad \cdots(1.2.9)$$

$$-\frac{2\pi\sigma^2 c}{E} + 4\gamma = 0 \quad \cdots(1.2.10)$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi c}}} \quad \cdots(1.2.11)$$

2. 単一粒子の破砕

2. 1 圧縮変形

互いに接触した2個の同一球形粒子 (半径 R_1 [mm], R_2 [mm]) に圧縮荷重 P [N] が作用しているとき、接触平面円の半径 a [mm] は次式で表される (ヘルツの弾性接触理論)。[文献 8-11]

$$a = \sqrt[3]{\frac{3P}{4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)} \quad \cdots(2.1.1)$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{3PR_{eq}}{4E_{eq}}} \left[\frac{1}{R_{eq}} \equiv \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \frac{1}{E_{eq}} \equiv \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right] \quad \dots(2.1.2)$$

ただし、 E_{eq} は相当ヤング率[MPa]、 R_{eq} は相当半径[mm]、 ν はポアソン比[-]。
 圧縮時の粒子重心間距離 δ [mm] は、次式のように導かれる。

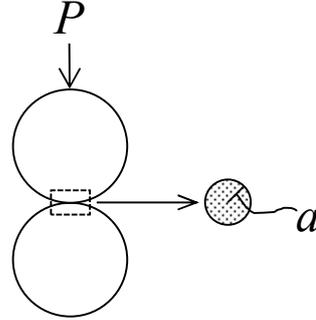
$$\delta = \frac{a^2}{R_{eq}} \quad \dots(2.1.3)$$

$$\delta = \left(\frac{1}{R_{eq}^{3/2}} \frac{3PR_{eq}}{4E_{eq}} \right)^{2/3} \quad \dots(2.1.4)$$

$$\delta = \left(\frac{1}{R_{eq}^{1/2}} \frac{3P}{4E_{eq}} \right)^{2/3} \quad \dots(2.1.5)$$

$$\delta = \left(\frac{9}{16} \frac{1}{R_{eq}} \frac{1}{E_{eq}^2} P^2 \right)^{1/3} \quad \dots(2.1.6)$$

$$\delta = \left[\frac{9}{16} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^2 P^2 \right]^{1/3} \quad \dots(2.1.7)$$



球粒子-平板間で接触している場合は、一方の球粒子を平板とみなす($R_2 = \infty$)。

$$\delta = \left[\frac{9}{16} \frac{(R_1/R_2) + (R_2/R_2)}{R_1 R_2 / R_2} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^2 P^2 \right]^{1/3} \quad \dots(2.1.8)$$

$$\delta = \left[\frac{9}{16} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^2 \frac{P^2}{R_1} \right]^{1/3} \quad \dots(2.1.9)$$

球粒子が上下2枚の平板から圧縮荷重を受ける場合の球重心の変位量(圧縮時の粒子変形量に相当) x [m] は、上の2倍になる。

$$x = 2 \left[\frac{9}{16} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^2 \frac{P^2}{R} \right]^{1/3} \quad \dots(2.1.10)$$

ただし、 E はヤング率[Pa]、 R は球半径[m]、 ν はポアソン比[-]。

2. 2 破碎強度

固体粒子に圧縮やせん断などの機械的な衝撃が加わると、粒子内部でひずみエネルギーが蓄積される。このひずみエネルギーは、粒子破碎が進むことで解放される。破碎機構は、外力によるものと粒子自身の慣性力によるものとに大別され、圧縮・せん断・衝撃・摩擦などに分類される [文献 12]。いま、粒子

半径 R [m]の単一球形粒子に圧縮荷重 P [N]が加えられたとする。加えられた圧縮荷重は粒子内部で引張荷重に変換され、粒子破碎は引張荷重に粒子破碎が起こる。引張強度(破碎時の引張応力)に相当する球圧壊強度 S_t [Pa]は、平松らの式より求める。[文献 13]

$$S_t = \frac{0.7P}{\pi R^2} \quad \dots(2.2.1)$$

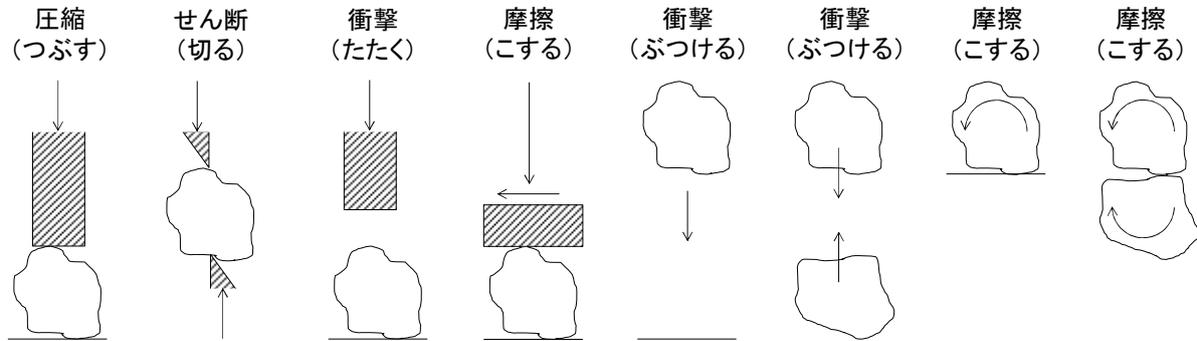


図 2.2.1 破碎のメカニズム [文献 12]

(最初の 4 例が外力によるもの、残りの 4 例が粒子自身の慣性力によるもの)

2. 3 破碎エネルギー

単一球形粒子が上下 2 枚の平板から圧縮荷重 P [N]を受ける場合の破碎エネルギー E_c [J]は、圧縮により粒子に蓄積される弾性ひずみエネルギーに等しく、 $P-x$ 曲線で囲まれる面積で表される。

$$E_c = \int_0^x P dx \quad \dots(2.3.1)$$

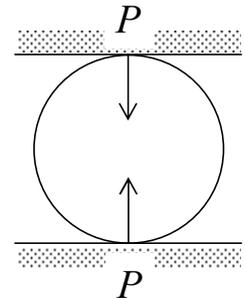
$$E_c = \int_0^P P \frac{dx}{dP} dP \quad \dots(2.3.2)$$

$$E_c = \int_0^P P \frac{d}{dP} \left[2 \left\{ \frac{9}{16} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^2 \frac{P^2}{R} \right\}^{1/3} \right] dP \quad \dots(2.3.3)$$

$$E_c = \int_0^P P \frac{d}{dP} \left[2 \left(\frac{9}{16} \right)^{1/3} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} \left(\frac{1}{R} \right)^{1/3} P^{2/3} \right] dP \quad \dots(2.3.4)$$

$$E_c = 2 \left(\frac{9}{16} \right)^{1/3} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} \left(\frac{1}{R} \right)^{1/3} \int_0^P P \left(\frac{2}{3} P^{-1/3} \right) dP \quad \dots(2.3.5)$$

$$E_c = \frac{4}{3} \left(\frac{9}{16} \right)^{1/3} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} \left[\left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{4\pi R^3/3} \right)^{1/3} \right] \int_0^P P^{2/3} dP \quad \dots(2.3.6)$$



$$E_c = \frac{4}{3} \left(\frac{9}{16} \right)^{1/3} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/9} \left(\frac{1}{V_p} \right)^{1/9} \frac{P^{5/3}}{5/3} \quad \dots(2.3.7)$$

$$E_c = \frac{4}{5} \left(\frac{9}{16} \right)^{1/3} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/9} V_p^{-1/9} P^{5/3} \quad \dots(2.3.8)$$

$$E_c = 0.774 \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} V_p^{-1/9} P^{5/3} \quad \dots(2.3.9)$$

ただし、 V_p は粒子体積[m³]。

平松らの式を用いて圧縮荷重の項を消去すると、粒子質量あたりの破砕エネルギー E_c/M_p [J/kg]に関する神田らの式が導かれる。[文献 14, 15]

$$E_c = 0.774 \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} V_p^{-1/9} \left[\left(\frac{\pi}{0.7} \right)^{5/3} (R^2)^{5/3} S_t^{5/3} \right] \quad \dots(2.3.10)$$

$$E_c = 0.774 \left(\frac{\pi}{0.7} \right)^{5/3} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} V_p^{-1/9} \left[\left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)^{2/3} \right]^{5/3} S_t^{5/3} \quad \dots(2.3.11)$$

$$E_c = 0.774 \left(\frac{\pi}{0.7} \right)^{5/3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{10/9} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} V_p^{-1/9} V_p^{10/9} S_t^{5/3} \quad \dots(2.3.12)$$

$$E_c = 1.92 \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} V_p S_t^{5/3} \quad \dots(2.3.13)$$

$$\frac{E_c}{M_p} = 1.92 \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} V_p S_t^{5/3} / (\rho_p V_p) \quad \dots(2.3.14)$$

$$\boxed{\frac{E_c}{M_p} = \frac{1.92}{\rho_p} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{2/3} S_t^{5/3}} \quad \dots(2.3.15)$$

ただし、 E はヤング率[Pa]、 M_p は粒子質量[kg]、 R は粒子半径[m]、 ρ_p は粒子密度[kg/m³]。

表 2.3.1 おもな材質のヤング率とポアソン比 [文献 15, 16]

材質	ヤング率 E [GPa]	ポアソン比 ν [-]	材質	ヤング率 E [GPa]	ポアソン比 ν [-]
石灰石	68.0	0.32	ステンレス鋼	197	0.30
大理石	53.4	0.30	炭素鋼	206	0.29
長石	58.7	0.26	銅	123	0.34
滑石	15.0	0.33	黄銅	100	0.35
石英	87.1	0.16	アルミニウム	73	0.34

セッコウ	37.8	0.32	ガラス	71	0.35
------	------	------	-----	----	------

【計算例】単一粒子の破砕

石灰石からなる単一球形粒子(粒子径 1 cm, 粒子密度 2660 kg/m³)をステンレス鋼製の平板にはさんで垂直に圧縮したところ、圧縮荷重 650 N で破砕した。球圧壊強度 S_t [MPa]、破砕エネルギー E_c [J]、重心の変位量 x [mm]を求めよ。($S_t=5.79$ MPa, $E_c=0.0128$ J, $x=0.0494$ mm)

$$R=D_p/2=0.01/2=0.005 \text{ m}$$

$$S_t=0.7P/(\pi R^2)=(0.7)(650)/[\pi(0.005)^2]=5.7932 \times 10^6 \text{ Pa} \doteq \boxed{5.79 \text{ MPa}}$$

$$E_c/M_p=(1.92/\rho_p)[(1-\nu_1^2)/E_1+(1-\nu_2^2)/E_2]^{2/3}S_t^{5/3}$$

$$=(1.92/2660)[(1-0.32^2)/(68.0 \times 10^9)+(1-0.30^2)/(197 \times 10^9)]^{2/3}(5.7932 \times 10^6)^{5/3}=9.2018 \text{ J/kg}$$

$$M_p=(\pi/6)D_p^3\rho_p=(\pi/6)(0.01)^3(2660)=0.0013927 \text{ kg}$$

$$E_c=(E_c/M_p)M_p=(9.2018)(0.0013927)=0.012815 \text{ J} \doteq \boxed{0.0128 \text{ J}}$$

$$x=(2)[(9/16)\{(1-\nu_1^2)/E_1+(1-\nu_2^2)/E_2\}^2(P^2/R)]^{1/3}$$

$$=(2)[(9/16)\{(1-0.32^2)/(68.0 \times 10^9)+(1-0.30^2)/(197 \times 10^9)\}^2\{(650)^2/0.005\}]^{1/3}=4.9425 \times 10^{-5} \text{ m} \doteq \boxed{0.0494 \text{ mm}}$$

【問題】単一粒子の破砕

- (1) 石英からなる単一球形粒子(粒子径 1 cm, 粒子密度 2650 kg/m³)をステンレス鋼製の平板にはさんで垂直に圧縮したところ、圧縮荷重 1900 N で破砕した。球圧壊強度 S_t [MPa]、破砕エネルギー E_c [J]、重心の変位量 x [mm]を求めよ。($S_t=16.9$ MPa, $E_c=0.0707$ J, $x=0.0933$ mm)
- (2) 石英からなる単一球形粒子(粒子径 3 cm, 粒子密度 2650 kg/m³)をステンレス鋼製の平板にはさんで垂直に圧縮したところ、圧縮荷重 6600 N で破砕した。球圧壊強度 S_t [MPa]、破砕エネルギー E_c [J]、重心の変位量 x [mm]を求めよ。($S_t=6.54$ MPa, $E_c=0.390$ J, $x=0.148$ mm)

3. 粉砕所要動力

処理能力 Q [t/h]の粉砕機を用いるときの粉砕所要動力 P [kW]は、粉砕仕事量 W [kWh/t]を用いて次式で表される。

$$P=WQ \quad \cdots(3.1)$$

粉砕仕事量 W [kWh/t]は、下記の各法則に基づく。

3. 1 Rittinger の法則

Rittinger(リッティンガー)によれば、粉砕の仕事量 W [kWh/t]($=P^{kW}/Q^{th}$)は、粉砕前後における比表面積 S_w [m²/kg]の増分に比例する【文献 17】。

$$W = K_{R0}(S_{wp} - S_{wf}) \quad \cdots(3.1.1)$$

$$W = K_{R0} \left(\frac{S_p}{W_p} - \frac{S_f}{W_f} \right) \quad \cdots(3.1.2)$$

$$W = K_{R0} \left(\frac{N\phi_s D_p^2}{N\phi_v \rho_p D_p^3} - \frac{N\phi_s D_f^2}{N\phi_v \rho_p D_f^3} \right) \quad \cdots(3.1.3)$$

$$W = K_{R0} \left(\frac{\phi}{\rho_p D_{ps,p}} - \frac{\phi}{\rho_p D_{ps,f}} \right) \left[\phi \equiv \frac{\phi_s}{\phi_v} \right] \quad \cdots(3.1.4)$$

$$\boxed{W = K_R \left(\frac{1}{D_{ps,p}} - \frac{1}{D_{ps,f}} \right)} \left[K_R \equiv \frac{K_{R0}\phi}{\rho_p} \right] \quad \cdots(3.1.5)$$

ただし、 K_R は定数[kWh・m/t]、 N は粒子数[-]、 D_{ps} は比表面積径[m]、添え字 f は砕料、 p は砕製物。Rittinger の法則は、表面積変化が支配的となる小粒径領域(微粉砕)に適用される。

3. 2 Kick の法則

Kick によれば、粉砕の仕事量 W [kWh/t]は、粉砕前後における粒径比の対数に比例する【文献 18】。いま、粒子径 D_f の砕料を n 回粉砕して得られる砕製物の粒子径が D_p のとき、総括の粉砕比 R [-]は次式で表される。

$$R \equiv \frac{D_f}{D_p} \quad \cdots(3.2.1)$$

各粉砕回の粉砕比を r [-](=各粉砕回における粉砕前粒径÷粉砕後粒径)とすると、粉砕回数 n [-]は次式のように導かれる。

$$R = r^n \quad \cdots(3.2.2)$$

$$n = \frac{\ln R}{\ln r} \quad \cdots(3.2.3)$$

各粉砕回の仕事量を W_n [kWh/t]とすると、砕料 1 t あたりの仕事量 W [kWh/t]は次式のように導かれる。

$$W = nW_n \quad \cdots(3.2.4)$$

$$W = W_n \frac{\ln R}{\ln r} \quad \cdots(3.2.5)$$

$$W = K_K \ln R \quad \cdots(3.2.6)$$

$$\boxed{W = K_K \ln \frac{D_f}{D_p}} \left[K_K \equiv \frac{W_n}{\ln r} \right] \quad \cdots(3.2.7)$$

ただし、 K_K は定数[kWh/t]。

Kick の法則は、体積変化が支配的となる大粒径領域(粗粉砕)に適用される。

3. 3 Bond の法則

Rittinger の法則(微粉砕域)と Kick の法則(粗粉砕域)の両方の概念を取り入れた中間法則(中砕域)に相当する。Bond によれば、粉体粒子 1 個が機械的に圧縮される時、粒子内部にひずみエネルギーが蓄積される【文献 19】。その大きさは、粒子体積、すなわち粒子径の 3 乗に比例する(Kick 則に相当)。やがて

粒子内部に亀裂が生じると、蓄積されていたひずみエネルギーは新しい表面の生成、すなわち粒子の破砕に消費されるようになる。その大きさは、粒子表面積、すなわち粒子径の 2 乗に比例する (Rittinger 則に相当)。亀裂の発生から破砕までを総括すると、べき乗の中間をとって粒子径の 2.5 乗に比例する。これを砕料体積あたりで考えると、粒子径の 3 乗に反比例するので、結局のところ、粉砕の仕事量は $D^{2.5}/D^3=D^{-0.5}$ に比例する。

$$W = K_B \left(\frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{80}}} \right) \quad \dots(3.3.1)$$

$$\boxed{W = 10W_i \left(\frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{80}}} \right)} \quad \left[W_i \equiv K_B \left(\frac{1}{\sqrt{100}} - \frac{1}{\sqrt{\infty}} \right) = \frac{K_B}{10} \right] \quad \dots(3.3.2)$$

ただし、 W_i は粉砕仕事指数 (work index) [kWh/t] であり、粒子径無限大の砕料を 100 μm まで粉砕するのに必要となる仕事量。粉砕抵抗を表しており、値が大きいほど粉砕しにくい。 F_{80} は砕料 (原料) の 80% 通過粒子径 [μm] (質量分率 80% が通過するふるいの目開き)、 P_{80} は砕製物 (製品) の 80% 通過粒子径 [μm]。

表 3.3.1 粉砕仕事指数 [文献 20]

砕料	比重	仕事指数 W_i [kWh/t]	砕料	比重	仕事指数 W_i [kWh/t]
石炭	1.40	14.30	磁鉄鉱	3.88	10.97
石灰岩	2.66	14.01	マンガン鉱	3.53	13.42
石英岩	2.65	14.93	ニッケル鉱	3.28	15.02
花崗岩	2.66	16.64	セッコウ	2.69	6.73
安山岩	2.84	20.06	ガラス	2.58	12.31
玄武岩	2.91	18.81	セメントクリンカー	3.15	17.80
赤鉄鉱	3.53	14.12	コークス	1.31	16.64

3.4 Lewis の法則

Rittinger、Kick、Bond の各式は、次の Lewis 式で整理される。 [文献 21]

$$\frac{dD_p}{dW} = -K_L D_p^n \quad \dots(3.4.1)$$

$n=2$ のとき、Rittinger の式が導かれる。

$$\int_0^W dW = -\frac{1}{K_L} \int_{D_f}^{D_p} D_p^{-2} dD_p \quad \dots(3.4.2)$$

$$W = -K_R \left[\frac{D_p^{-2+1}}{-2+1} \right]_{D_f}^{D_p} \quad \left[K_R \equiv \frac{1}{K_L} \right] \quad \dots(3.4.3)$$

$$\boxed{W = K_R \left(\frac{1}{D_p} - \frac{1}{D_f} \right)} \quad (\text{Rittinger, } n=2) \quad \dots(3.4.4)$$

ただし、粒子径には比表面積径を用いる。

$n=1$ のとき、Kick の式が導かれる。

$$\int_0^W dW = -\frac{1}{K_L} \int_{D_f}^{D_p} D_p^{-1} dD_p \quad \cdots(3.4.5)$$

$$W = -K_K \left[\ln D_p \right]_{D_f}^{D_p} \left[K_K \equiv \frac{1}{K_L} \right] \quad \cdots(3.4.6)$$

$$\boxed{W = K_K \ln \frac{D_f}{D_p}} \quad (\text{Kick}, n=1) \quad \cdots(3.4.7)$$

$n=1.5$ のとき、Bond の式が導かれる。

$$\int_0^W dW = -\frac{1}{K_L} \int_{D_f}^{D_p} D_p^{-1.5} dD_p \quad \cdots(3.4.8)$$

$$W = -\frac{K_B}{2} \left[\frac{D_p^{-1.5+1}}{-1.5+1} \right]_{D_f}^{D_p} \left[K_B \equiv \frac{2}{K_L} \right] \quad \cdots(3.4.9)$$

$$\boxed{W = K_B \left(\frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{80}}} \right)} \quad (\text{Bond}, n=1.5) \quad \cdots(3.4.10)$$

3. 5 粉砕限界説

微粉砕の場合、粉砕媒体への付着や粒子内の亀裂存在割合の減少によって粉砕効率が低下する。田中は、粉砕によって増大する比表面積にはある限界値が存在することを考慮して次式を導いた。[文献 22]

$$\ln \frac{S_\infty - S_0}{S_\infty - S} = K_T W \quad \cdots(3.5.1)$$

$$\frac{S_\infty}{S_\infty - S} = \exp(K_T W) \quad [S_\infty - S_0 \approx S_\infty] \quad \cdots(3.5.2)$$

$$-\frac{S_\infty}{S - S_\infty} = \exp(K_T W) \quad \cdots(3.5.3)$$

$$S - S_\infty = -S_\infty \exp(-K_T W) \quad \cdots(3.5.4)$$

$$\boxed{S = S_\infty [1 - \exp(-K_T W)]} \quad \cdots(3.5.5)$$

ただし、 K_T は定数[t/kWh]、 S_0 は砕料の初期比表面積[m²/kg]、 S_∞ は限界比表面積[m²/kg]。

粉砕仕事量 W [kWh/t] の式に直すと、次式のようにになる。

$$\exp(-K_T W) = 1 - \frac{S}{S_\infty} \quad \cdots(3.5.6)$$

$$-K_T W = \ln \left(1 - \frac{S}{S_\infty} \right) \quad \cdots(3.5.7)$$

$$\boxed{W = -\frac{1}{K_T} \ln \left(1 - \frac{S}{S_\infty} \right)} \quad \cdots(3.5.8)$$

$$W = -\frac{1}{K_T} \ln \left[1 - \left(\frac{\phi_s D_{ps}^2}{\rho_p \phi_v D_{ps}^3} / \frac{\phi_s D_{ps,\infty}^2}{\rho_p \phi_v D_{ps,\infty}^3} \right) \right] \quad \dots(3.5.9)$$

$$W = -\frac{1}{K_T} \ln \left(1 - \frac{D_{ps,\infty}}{D_{ps}} \right) \quad \dots(3.5.10)$$

【計算例】 粉碎所要動力

- (1) 処理能力 20 t/h の粉碎機を用いて砕料を 500 mm から 100 mm まで粉碎したときの所要動力は 40 kW であった。これと同形式の粉碎機を処理能力 500 t/h にスケールアップして上と同じ砕料を 1000 mm から 500 mm まで粉碎するときの所要動力 W [kW] を①Rittinger 則、②Kick 則、③Bond 則にしたがって求めよ。(①125 kW, ②431 kW, ③237 kW)

$$W_1 = P_1 / Q_1 = 40 / 20 = 2 \text{ kWh/t}$$

$$\textcircled{1} K_R = W_1 / [(1/D_{p1}) - (1/D_{f1})] = 2 / [(1/0.100) - (1/0.500)] = 0.250$$

$$W_2 = K_R [(1/D_{p2}) - (1/D_{f2})] = (0.250) [(1/0.500) - (1/1.00)] = 0.250 \text{ kWh/t}$$

$$P_2 = W_2 Q_2 = (0.250)(500) = 125 \text{ kW} \approx \boxed{125 \text{ kW}} \text{ (Rittinger)}$$

$$\textcircled{2} K_K = W_1 / \ln(D_{f1}/D_{p1}) = 2 / \ln(500/100) = 1.2426$$

$$W_2 = K_K \ln(D_{f2}/D_{p2}) = (1.2426) \ln(1000/500) = 0.86130 \text{ kWh/t}$$

$$P_2 = W_2 Q_2 = (0.86130)(500) = 430.65 \text{ kW} \approx \boxed{431 \text{ kW}} \text{ (Kick)}$$

$$\textcircled{3} K_B = W_1 / [(1/D_{p1}^{0.5}) - (1/D_{f1}^{0.5})] = 2 / [(1/0.100^{0.5}) - (1/0.500^{0.5})] = 1.1441$$

$$W_2 = K_B [(1/D_{p2}^{0.5}) - (1/D_{f2}^{0.5})] = (1.1441) [(1/0.500^{0.5}) - (1/1.00^{0.5})] = 0.47390 \text{ kWh/t}$$

$$P_2 = W_2 Q_2 = (0.47390)(500) = 236.95 \text{ kW} \approx \boxed{237 \text{ kW}} \text{ (Bond)}$$

- (2) 処理能力 5 t/h の粉碎機を用いて 80% 砕料径 10 mm のニッケル鉱を 80% 砕製径 0.1 mm まで粉碎する。Bond の法則が成り立つときの粉碎所要動力 P [kW] を求めよ。(67.6 kW)

$$W = 10 W_i [(1/P_{80}^{0.5}) - (1/F_{80}^{0.5})] = (10)(15.02) [(1/100^{0.5}) - (1/10000^{0.5})] = 13.518 \text{ kWh/t}$$

$$P = W Q = (13.518)(5) = 67.590 \text{ kW} \approx \boxed{67.6 \text{ kW}}$$

- (3) 処理能力 0.5 t/h の粉碎機を用いて積算ふるい上分布 $R = \exp(-D_p/10)^{1.8}$ の石炭を粉碎したところ、 $R = \exp(-D_p/0.10)^{1.8}$ の砕製物が得られた。Bond の法則が成り立つときの粉碎所要動力 P [kW] を求めよ。分布式中の粒子径 D_p の単位は [mm] である。(5.64 kW)

$$U = 1 - R = 1 - \exp(-D_p/D_{pc})^n$$

$$0.80 = 1 - \exp(-F_{80}/10)^{1.8}$$

$$\ln 0.20 = (-F_{80}/10)^{1.8}$$

$$(\ln 0.20)^{1/1.8} = -F_{80}/10$$

$$F_{80} = -(10)(\ln 0.20)^{1/1.8} = 13.026 \text{ mm} = 13026 \mu\text{m}$$

$$0.80 = 1 - \exp(-P_{80}/0.10)^{1.8}$$

$$\ln 0.20 = (-P_{80}/0.10)^{1.8}$$

$$(\ln 0.20)^{1/1.8} = -P_{80}/0.10$$

$$P_{80} = -(0.10)(\ln 0.20)^{1/1.8} = 0.13026 \text{ mm} = 130.26 \mu\text{m}$$

$$W=10W_i[(1/P_{80}^{0.5})-(1/F_{80}^{0.5})]=(10)(14.30)[(1/130.26^{0.5})-(1/13026^{0.5})]=11.276 \text{ kWh/t}$$

$$P=WQ=(11.276)(0.5)=5.638 \text{ kW} \approx \boxed{5.64 \text{ kW}}$$

【問題】粉砕所要動力

- (1) 処理能力 10 t/h の粉砕機を用いて砕料を 100 mm から 10 mm まで粉砕したときの所要動力は 20 kW であった。これと同形式の粉砕機を処理能力 200 t/h にスケールアップして上と同じ砕料を 500 mm から 100 mm まで粉砕するときの所要動力 W [kW] を①Rittinger 則、②Kick 則、③Bond 則にしたがって求めよ。(①35.6 kW, ②280 kW, ③102 kW)
- (2) 処理能力 5 t/h の粉砕機を用いて砕料を 100 mm から 10 mm まで粉砕したときの所要動力は 10 kW であった。これと同じ粉砕機を用いて上と同じ砕料を 80 mm から 20 mm まで粉砕するときの所要動力 W [kW] を①Rittinger 則、②Kick 則、③Bond 則にしたがって求めよ。(①4.17 kW, ②6.02 kW, ③5.17 kW)
- (3) 処理能力 20 t/h の粉砕機を用いて 80% 砕料径 1000 mm の石英岩を 80% 砕製径 10 mm まで粉砕する。Bond の法則が成り立つときの粉砕所要動力 P [kW] を求めよ。(26.9 kW)
- (4) 処理能力 10 t/h の粉砕機を用いて 80% 砕料径 1000 mm の石灰岩を 80% 砕製径 100 mm まで粉砕する。Bond の法則が成り立つときの粉砕所要動力 P [kW] を求めよ。(3.03 kW)
- (5) 処理能力 20 t/h の粉砕機を用いて積算ふるい上分布 $R=\exp(-D_p/1000)^{2.4}$ の石灰炭を粉砕したところ、 $R=\exp(-D_p/10)^{2.4}$ の砕製物が得られた。Bond の法則が成り立つときの粉砕所要動力 P [kW] を求めよ。分布式中の粒子径 D_p の単位は [mm] である。(22.8 kW)
- (6) 処理能力 10 t/h の粉砕機を用いて積算ふるい上分布 $R=\exp(-D_p/100)^{2.0}$ のマンガン鉱を粉砕したところ、 $R=\exp(-D_p/1)^{2.0}$ の砕製物が得られた。Bond の法則が成り立つときの粉砕所要動力 P [kW] を求めよ。分布式中の粒子径 D_p の単位は [mm] である。(33.9 kW)

4. 粉砕機

粉砕機には、ジョークラッシャーやジャイレトリークラッシャーなどの**破砕機**(数十センチ～数ミリ)、ロールクラッシャーやハンマーミルなどの**中砕機**(数ミリ～数百マイクロン)、ボールミルやロッドミルなどの**微粉砕機**(数十マイクロン～数マイクロン)がある。**ジョークラッシャー**は、二つの顎板の間に砕料を噛み込ませて、圧縮力と衝撃力による破砕を行う。選鉱場や採石場における鉱石や岩石の一次粉砕によく用いられる。**ジャイレトリークラッシャー**は、偏心運動する粉砕頭と装置壁の間に砕料を噛み込ませて、圧縮力と衝撃力による粉砕を行う。選鉱場や採石場における鉱石や岩石の一次または二次粉砕によく用いられる。**ロールクラッシャー**は、並列に置かれた互いに逆向きに回転する二つ以上のローラー間に砕料を噛み込ませて、圧縮力・衝撃力・せん断力・摩擦力による粉砕を行う。**ボールミル**は、円筒状の容器内にボールやペブルなどの粉砕媒体とともに砕料を閉じ込めて容器を回転させることで衝撃力・せん断力・摩擦力による粉砕を行う。選鉱場、セメント工場、セラミックス製造などで用いられる。

5. 破砕機の設計

5. 1 ジョークラッシャー [文献 23, 24]

①構造設計 ジョープレート(顎板)の幅 W_j [m]と深さ Z [m]は、粉碎室の入口幅 G [m]に対する次の寸法比で与えられる。

$$W_j/G = 1.3 \sim 3.0 \quad \cdots(5.1.1)$$

$$Z/G = 2 \quad \cdots(5.1.2)$$

粉碎室の入口幅 G [m]は、経験的に砕料の最大径 F_{\max} [m]の 1.1 倍とする。

$$G = 1.1F_{\max} \quad \cdots(5.1.3)$$

②臨界回転速度 偏心軸の回転速度 N [rpm]は、ジョープレートが水平方向に半分だけストロークするのにかかる往路の時間 t [s]の内に砕料粒子が粉碎室出口からの高さ h [m]だけ自由落下するものとして、次式のように導かれる。

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{60}{2N}\right)^2 = \frac{450g}{N^2} \quad \cdots(5.1.4)$$

$$N = \sqrt{\frac{450g}{h}} \quad \cdots(5.1.5)$$

ただし、 g は重力加速度[m/s²]。

粉碎室出口からの高さ h は、固定ジョープレートと可動ジョープレートの挟み角 θ [rad]の正接を消去して導かれる。

$$\tan \theta = \frac{L_s}{h} = \frac{G - L_{\max}}{Z} \quad \cdots(5.1.6)$$

$$\frac{L_s}{h} = \frac{G - L_{\max}}{Z} \quad \cdots(5.1.7)$$

$$h = \frac{2L_s G}{G - L_{\max}} \quad [Z/G = 2] \quad \cdots(5.1.8)$$

ただし、 L_{\max} は粉碎室の最大出口幅[m]、 L_s は可動ジョープレートのストローク長(水平方向の往復幅) [m]。
 N の式に代入すると、偏心軸の臨界回転速度 N_c [rpm]が導かれる。

$$N_c = \sqrt{\frac{450g}{2L_s G / (G - L_{\max})}} \quad \cdots(5.1.9)$$

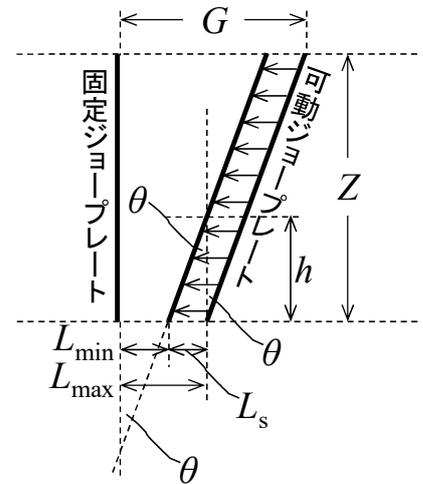
$$N_c \approx 47 \sqrt{\frac{G - L_{\max}}{L_s G}} \quad \cdots(5.1.10)$$

$$N_c = \frac{47}{\sqrt{L_s}} \sqrt{\frac{G - L_{\min} - L_s}{G}} \quad [L_{\max} = L_{\min} + L_s] \quad \cdots(5.1.11)$$

$$N_c = \frac{47}{\sqrt{L_s}} \sqrt{\frac{(G/L_{\min}) - 1 - (L_s/L_{\min})}{(G/L_{\min})}} \quad \cdots(5.1.12)$$

$$N_c = \frac{47}{\sqrt{L_s}} \sqrt{\frac{R-1}{R} - \frac{L_s}{RL_{\min}}} \quad \left[R \equiv \frac{G}{L_{\min}} \right] \quad \cdots(5.1.13)$$

$$\boxed{N_c = \frac{47}{\sqrt{L_s}} \sqrt{\frac{R-1}{R}}} \quad \left[\frac{L_s}{RL_{\min}} \approx 0 \right] \quad \cdots(5.1.14)$$



この値よりも回転数が小さくなると、ジョープレートが砕料を噛み込むよりも前に砕料が粉碎室から排

出されてしまうことから、実際の操作ではこの値以上にする必要がある。採用すべき最適回転数 N_{opt} [rpm] として次式が知られている。

$$N_{\text{opt}} = 280 \exp(-0.212G^3) \quad \cdots(5.1.15)$$

③処理能力 ジョークラッシャーの処理能力 Q [t/h]については、Rose(ローズ) & English の式が知られている。[文献 23]

$$Q = 60L_s N W_J (L_{\text{max}} + L_{\text{min}}) \frac{R}{R-1} \rho_p f(\sigma) f(\gamma) S_c \quad \cdots(5.1.16)$$

ただし、 L_{max} は粉碎室の最大出口幅[m]、 L_{min} は粉碎室の最小出口幅[m]、 L_s は可動ジョープレーートのストローク長(水平方向の往復幅)[m]、 R は粉碎比[-]、 S_c は粒子表面特性因子[-]、 W_J はジョープレーートの幅[m]、 γ は構造特性因子[-]、 σ は充填特性因子[-]、 ρ_p は砕料密度[t/m³]、 N は偏心軸の回転速度[rpm]。粉碎室の最大出口幅 L_{max} は、最小出口幅 L_{min} と可動ジョープレーートのストローク長 L_s の和で与えられる。

$$L_{\text{max}} = L_{\text{min}} + L_s \quad \cdots(5.1.17)$$

粉碎比 R は砕料と砕製物の粒子径比で定義され(Kick の法則)、もとの何分の一にまで粒子径を減少させるかを表す。粒子径の取り方は複数考えられるが、ここでは砕料の最大径 F_{max} と最小出口幅を通過した砕製物の最大径 P_{max} の比で定義することで、設計上は粉碎室の入口幅 G と最小出口幅 L_{min} の比に近似される。

$$R \left(\equiv \frac{F_{\text{max}}}{P_{\text{max}}} \right) \approx \frac{G}{L_{\text{min}}} \quad (R=4 \sim 10) \quad \cdots(5.1.18)$$

粉碎室の最小出口幅 L_{min} は、上式より求める。

$$L_{\text{min}} = \frac{G}{R} \quad \cdots(5.1.19)$$

可動ジョープレーートのストローク長 L_s [m]は、経験的に次式を用いる。

$$L_s = 0.0502G^{0.85} \quad \cdots(5.1.20)$$

充填特性因子 σ は、砕料の粒子径分布に関する因子として次式で定義される。

$$\sigma = \frac{F_{\text{max}} - F_{\text{min}}}{F_{50}} \quad \cdots(5.1.21)$$

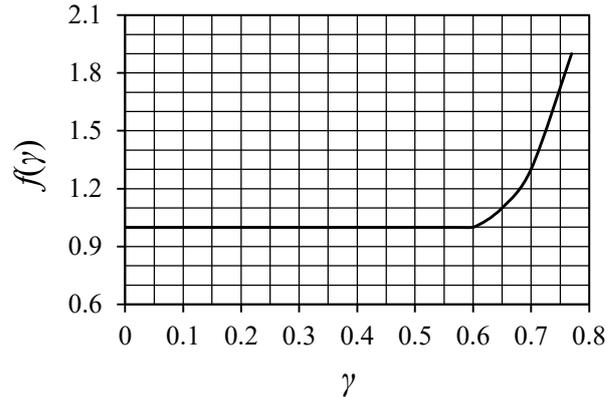
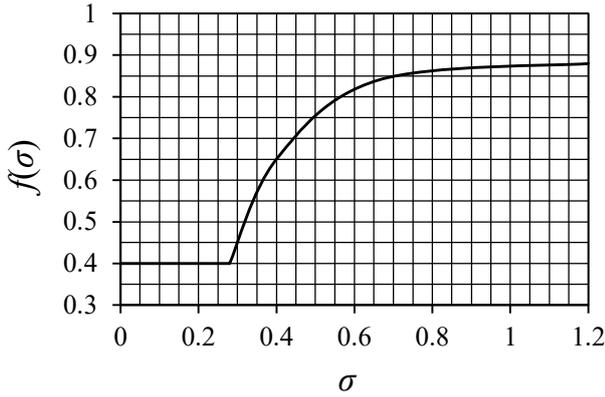
ただし、 F_{50} は砕料の平均粒子径[m]、 F_{max} は砕料の最大粒子径[m]、 F_{min} は砕料の最小粒子径[m]。

構造特性因子 γ は、粉碎室の平均出口幅と砕料平均径の比で定義される。

$$\gamma = \frac{L_{\text{av}}}{F_{50}} \quad \cdots(5.1.22)$$

$$\gamma = \frac{L_{\text{min}} + L_{\text{max}}}{2F_{50}} \quad \left[L_{\text{av}} \equiv \frac{L_{\text{min}} + L_{\text{max}}}{2} \right] \quad \cdots(5.1.23)$$

$f(\sigma)$ 値と $f(\gamma)$ 値は、図上で推定する。



④粉砕所要動力 連続式ジョークラッシャーの粉砕所要動力 P [kW]は、次式より求める。

$$P = WQ \quad \cdots(5.1.24)$$

$$W = 10W_i \left(\frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{80}}} \right) \text{ [kWh/t]} \quad \cdots(5.1.25)$$

ただし、 Q は処理能力[t/h]、 W は粉砕仕事量[kWh/t]、 W_i は粉砕仕事指数[kWh/t]。

砕料の 80%通過粒子径 F_{80} [μm]は、砕料の最大粒子径 F_{\max} [μm]の 0.7 倍を見積もる。

$$F_{80} = 0.7F_{\max} \quad \cdots(5.1.26)$$

砕製物の 80%通過粒子径 P_{80} [μm]は、粉砕室の最大出口幅 L_{\max} [μm]の 0.7 倍を見積もる。

$$P_{80} = 0.7L_{\max} \quad \cdots(5.1.27)$$

【問題】 ジョークラッシャーの設計

石灰岩をジョークラッシャーで連続粉砕する。①粉砕室の入口幅 G [mm]、②ジョープレートの幅 W_j [mm]、③ジョープレートの深さ Z [mm]、④挟み角 θ [deg.]、⑤偏心軸の回転速度 N [rpm] (臨界回転数 N_c 以上であることを確認せよ)、⑥処理能力 Q [t/h]、⑦粉砕仕事量 W [kWh/t]、⑧粉砕所要動力 P [kW]を求めよ。(① 1320 mm, ② 1980 mm, ③ 2640 mm, ④ 19.3°, ⑤ 172 rpm, ⑥ 2915 t/h, ⑦ 0.114 kWh/t, ⑧ 332 kW)

砕料	石灰岩	粉砕比 R	4
砕料密度 ρ_p	2.66 t/m ³	ジョープレート幅－粉砕室入口幅比 W_j/G	1.5
砕料の平均粒子径 F_{50}	750 mm	粒子表面特性因子 S_c	1
砕料の最小粒子径 F_{\min}	330 mm	偏心軸の回転速度 N	最適回転数 N_{opt}
砕料の最大粒子径 F_{\max}	1200 mm	重力加速度 g	9.81 m/s ²

5. 2 ジャイレトリークラッシャー [文献 25]

①構造設計 粉砕頭の直径 D_M [m]、粉砕頭の深さ Z [m]、粉砕機の周長 C [m]、粉砕室の直径 D_c [m]は、粉砕室の入口幅 G [m]に対する次の寸法比で与えられる。

$$D_M/G = 1.3 \sim 1.7 \quad \cdots(5.2.1)$$

$$Z/G = 2 \quad \cdots(5.2.2)$$

$$C/G = 6.5 \sim 10 \quad \cdots(5.2.3)$$

$$D_c/G = 2.1 \sim 3.2 \quad [C \approx \pi D_c] \quad \dots(5.2.4)$$

粉砕室の入口幅 G [m]は、砕料の最大粒子径 F_{\max} [m]の 1.1 倍とする。

$$G = 1.1F_{\max} \quad \dots(5.2.5)$$

②**臨界旋動速度** 粉砕頭の最大臨界旋動速度 $N_{c,\max}$ [rpm]は、次式で与えられる。

$$N_{c,\max} = \frac{66.6}{\sqrt{L_s/\tan \theta}} \quad \dots(5.2.6)$$

ただし、 L_s はストローク長[m]、 θ は挟み角[deg.](大型機の場合 21~24°、粉砕面が曲面の場合 27~30°)。この値よりも回転数が大きくなると、自由落下する砕料が粉砕頭に噛み込まれるよりも前に粉砕頭が戻ってきてしまうことから、実際の操作ではこの値以下にする必要がある。

粉砕頭のストローク長 L_s [m]と挟み角 θ [deg.]は、近似的にジョークラッシャーの式を用いる。

$$L_s = 0.0502G^{0.85} \quad \dots(5.2.7)$$

$$\tan \theta = \frac{G - L_{\max}}{Z} \quad \dots(5.2.8)$$

粉砕室の最大出口幅 L_{\max} は、最小出口幅と粉砕頭のストローク長 L_s の和で与えられる。

$$L_{\max} = L_{\min} + L_s \quad \dots(5.2.9)$$

粉砕室の最小出口幅 L_{\min} は、粉砕比の近似式より求める。

$$R \left(\equiv \frac{F_{\max}}{P_{\max}} \right) \approx \frac{G}{L_{\min}} \quad \dots(5.2.10)$$

$$L_{\min} = \frac{G}{R} \quad (R=3 \sim 10) \quad \dots(5.2.11)$$

粉砕頭の最小臨界旋動速度 $N_{c,\min}$ [rpm]は、次式で与えられる。

$$N_{c,\min} = \frac{66.5(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\sqrt{P_{\max}}} \quad \dots(5.2.12)$$

ただし、 P_{\max} は最小出口幅を通過した砕製物の最大粒子径[m]($\equiv L_{\min}$)、 α は粉砕頭の傾斜角[deg.]、 μ は摩擦係数[-]。

砕製物の粒子径を P_{\max} 以下とするには、旋動速度をこの値以上にする必要がある。

③**処理能力** ジャイレトリークラッシャーの処理能力 Q [t/h]を与える推算式として、Broman の式がある。

[文献 26]

$$Q = \frac{60K\pi(D_M - L_{\max})L_{\max}L_sN\rho_p}{\tan \theta} \quad \dots(5.2.13)$$

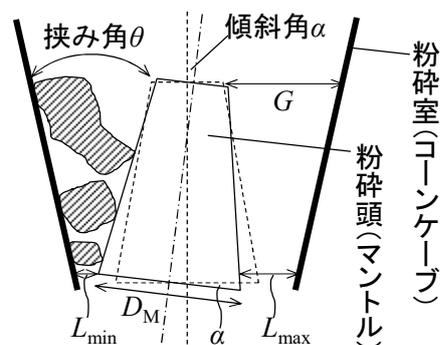
ただし、 D_M は粉砕頭の直径[m]、 K は定数(2~3の間)、 L_{\max} は粉砕室の最大出口幅[m]、 L_s は粉砕頭のストローク長[m]、 N は粉砕頭の旋動速度[rpm]、 θ は挟み角[deg.]、 ρ_p は砕料密度[t/m³]。

④**粉砕所要動力** 連続式ジャイレトリークラッシャーの粉砕所要動力 P [kW]は、次式より求める。

$$P = WQ \quad \dots(5.2.14)$$

$$W = 10W_i \left(\frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{80}}} \right) \quad \dots(5.2.15)$$

ただし、 Q は処理能力[t/h]、 W は粉砕仕事量[kWh/t]、 W_i は粉砕仕事指数[kWh/t]



砕料の 80%通過粒子径 F_{80} [μm]は、砕料の最大粒子径 F_{max} [μm]の 0.7 倍を見積もる。

$$F_{80} = 0.7F_{\text{max}} \quad \dots(5.2.16)$$

砕製物の 80%通過粒子径 P_{80} [μm]は、粉碎室の最大出口幅 L_{max} [μm]の 0.7 倍を見積もる。

$$P_{80} = 0.7L_{\text{max}} \quad \dots(5.2.17)$$

【問題】 ジャイロトリークラッシャーの設計

花崗岩をジャイロトリークラッシャーで連続粉砕する。①粉碎室の入口幅 G [mm]、②粉碎頭の直径 D_M [mm]、③粉碎頭の深さ Z [mm]、④粉碎機の周長 C [mm]、⑤粉碎室の直径 D_c [mm]、⑥挟み角 θ [deg.]、⑦粉碎頭の回転速度 N [rpm](最小臨界回転速度 $N_{c,\text{min}}$ 以上かつ最大臨界回転速度 $N_{c,\text{max}}$ 以下であることを確認せよ)、⑧粉碎仕事量 W [kWh/t]、⑨粉碎所要動力 P [kW]を求めよ。(①1320 mm, ②2244 mm, ③2640 mm, ④13200 mm, ⑤3300 mm, ⑥23.0°, ⑦112 rpm, ⑧0.268 kWh/t, ⑨1341 kW)

砕料	花崗岩	粉碎頭径－粉碎室入口幅比 D_M/G	1.3
砕料密度 ρ_p	2.66 t/m ³	粉碎機周長－粉碎室入口幅比 C/G	10
砕料の最大粒子径 F_{max}	1200 mm	粉碎室径－粉碎室入口幅比 D_c/G	2.5
砕料の摩擦係数 μ	0.2	粉碎頭の傾斜角 α	30°
処理能力 Q	5000 t/h	K 値	2
粉碎比 R	10	重力加速度 g	9.81 m/s ²

5. 3 ロールクラッシャー [文献 27, 28]

①構造設計 ロールクラッシャーのロール径 D_R [m]は、ロールと砕料粒子の位置関係より次式のように導かれる。

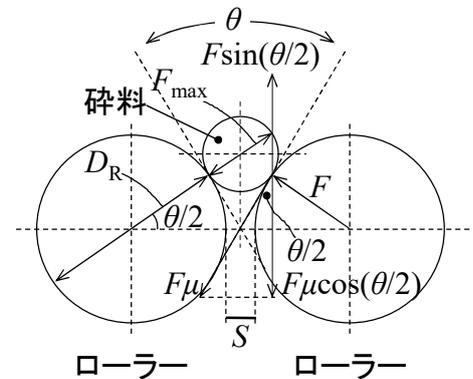
$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{(D_R/2) + (S/2)}{(D_R/2) + (F_{\text{max}}/2)} \quad \dots(5.3.1)$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{D_R + S}{D_R + F_{\text{max}}} \quad \dots(5.3.2)$$

$$D_R \cos(\theta/2) + F_{\text{max}} \cos(\theta/2) = D_R + S \quad \dots(5.3.3)$$

$$D_R [\cos(\theta/2) - 1] = S - F_{\text{max}} \cos(\theta/2) \quad \dots(5.3.4)$$

$$D_R = \frac{F_{\text{max}} \cos(\theta/2) - S}{1 - \cos(\theta/2)} \quad \dots(5.3.5)$$



ただし、 F_{max} は砕料の最大粒子径[m]、 S はロール間隔[m]、 θ は挟み角[deg.]。

ロール幅 W_R [m]については、次式が知られている。 [文献 29, 30]

$$W_R = \frac{D_R}{3} + 0.25 \quad \dots(5.3.6)$$

ロール間隔 S [m]は、砕製物の最大粒子径 P_{max} [m]と等置する。

$$S (\approx P_{\text{max}}) = \frac{F_{\text{max}}}{R} \left[R \equiv \frac{F_{\text{max}}}{P_{\text{max}}} \right] \quad \dots(5.3.7)$$

挟み角 θ [deg.]は、ロールと砕料粒子間の力のつり合い式より導かれる。

$$F \sin(\theta/2) = F \mu \cos(\theta/2) \quad \cdots(5.3.8)$$

$$\tan(\theta/2) = \mu \quad \cdots(5.3.9)$$

$$\theta = 2 \tan^{-1} \mu \quad \cdots(5.3.10)$$

ただし、 F はロールの圧縮力[N]、 μ は摩擦係数[-](一般に $\mu=0.2\sim0.3$)。

②処理能力 ロールクラッシャーの処理能力 Q [t/h]は、次式のように導かれる。

$$Q = 2W_R(S/2)(3600u)\rho_b\eta \quad \cdots(5.3.11)$$

$$Q = 2W_R(S/2)[3600\pi D_R(N/60)]\rho_b\eta \quad \cdots(5.3.12)$$

$$Q = 60\pi D_R W_R S N \rho_b \eta \quad \cdots(5.3.13)$$

ただし、 D_R はロール径[m]、 N はロールの回転速度[rpm]、 S はロール間隔[m]、 u はロールの周速[m/s](= 周長 πD_R /周期 N^{-1})、 W_R はロール幅[m]、 ρ_b は砕料かさ密度[t/m³]、 η は効率[-](0.1~0.3)。

③粉砕所要動力 連続式ロールクラッシャーの粉砕所要動力 P [kW]は、次式より求める。

$$P = WQ \quad \cdots(5.3.14)$$

$$W = 10W_i \left(\frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{80}}} \right) \quad \cdots(5.3.15)$$

ただし、 Q は処理能力[t/h]、 W は粉砕仕事量[kWh/t]、 W_i は粉砕仕事指数[kWh/t]

砕料の 80%通過粒子径 F_{80} [μm]は、砕料の最大粒子径 F_{max} [μm]の 0.7 倍を見積もる。

$$F_{80} = 0.7F_{\text{max}} \quad \cdots(5.3.16)$$

砕製物の 80%通過粒子径 P_{80} [μm]は、ロール間隔 S [μm]の 0.7 倍を見積もる。

$$P_{80} = 0.7S \quad \cdots(5.3.17)$$

【問題】 ロールクラッシャーの設計

石英岩をロールクラッシャーで連続粉砕する。①ロール間隔 S [mm]、②挟み角 θ [deg.]、③ロール径 D_R [mm]、④ロール幅 W_R [mm]、⑤ロール回転速度 N [rpm]、⑥粉砕仕事量 W [kWh/t]、⑦粉砕所要動力 P [kW] を求めよ。(①10 mm, ②22.6°, ③2013 mm, ④921 mm, ⑤191 rpm, ⑥0.986 kWh/t, ⑦197 kW)

砕料	石英岩	処理能力 Q	200 t/h
砕料のかさ密度 ρ_b	1.5 t/m ³	粉砕比 R	5
砕料の最大粒子径 F_{max}	50 mm	効率 η	20%
砕料の摩擦係数 μ	0.2		

6. 微粉砕機の設計

6. 1 ボールミル [文献 31-40]

①構造設計 ボールミルの長さ L_G [m]は、ボールミルの直径 D_G [m]に対する次の寸法比で与えられる。

$$L_G/D_G = 0.5\sim3.5 \quad \cdots(6.1.1)$$

ボールミル本体の容積 V_G [m³]は、砕料体積 V [m³]の 4~5 倍を取る。

$$V_G/V = 4\sim5 \quad \cdots(6.1.2)$$

$$V_G = (V_G/V)V \quad \cdots(6.1.3)$$

$$\boxed{V_G = \frac{(V_G/V)M}{\rho_p}} \quad \cdots(6.1.4)$$

ただし、 M は砕料の仕込み量[kg]、 ρ_p は砕料密度[kg/m³]。

ボールミルの形状を円柱とみなすと、ボールミルの直径 D_G [m]は次式のように導かれる。

$$V_G = \pi \left(\frac{D_G}{2} \right)^2 L_G \quad \cdots(6.1.5)$$

$$V_G = \pi \left(\frac{D_G}{2} \right)^2 \left(\frac{L_G}{D_G} \right) D_G \quad \cdots(6.1.6)$$

$$V_G = \frac{\pi D_G^3}{4} \left(\frac{L_G}{D_G} \right) \quad \cdots(6.1.7)$$

$$\boxed{D_G = \sqrt[3]{\frac{4V_G}{\pi(L_G/D_G)}}} \quad \cdots(6.1.8)$$

粉碎媒体(ボール)密度 ρ_B [t/m³]は、Rose & Sullivan の式を用いる。[文献 33, 34]

$$\rho_B = \sqrt{0.016\rho_p^2 + 20\rho_p} - 0.4\rho_p \quad \cdots(6.1.9)$$

ただし、 ρ_p は砕料密度[t/m³]。

粉碎媒体(ボール)径 d_B [mm]は、Bond の式を用いる。[文献 31, 32]

$$d_B = 25.4 \sqrt{\frac{F_{80}}{K} \left[\frac{\rho_p W_i}{(100N/N_c)\sqrt{3.281D_G}} \right]^{-1/3}} \quad \cdots(6.1.10)$$

ただし、 D_G はミル径[m]、 F_{80} は砕料の 80%通過粒子径[μ m]、 K は操作条件に関する定数(乾式粉碎のとき 335、湿式粉碎のとき 350)、 W_i は仕事指数[kWh/t]、 N はミル回転速度[rpm]、 N_c は臨界回転速度[rpm]、 ρ_p は砕料密度[t/m³]。

②臨界回転速度 質量 M_{B0} [kg]の単一粉碎媒体(ボール)が有効半径 R [m](=ミル半径-ボール半径)のミル本体の回転によって持ち上げられているとき、粉碎媒体にかかる遠心力と重力はつり合っている。

$$\frac{M_{B0}v^2}{R} = M_{B0}g \cos \theta \quad \cdots(6.1.11)$$

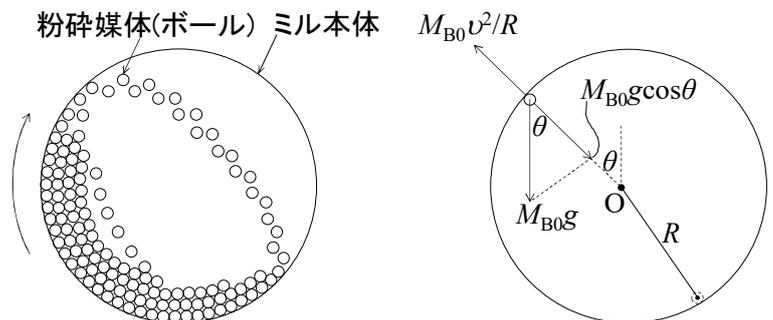
$$\frac{(R\omega)^2}{R} = g \cos \theta \quad \cdots(6.1.12)$$

$$\frac{R^2 [2\pi(N/60)]^2}{R} = g \cos \theta \quad \cdots(6.1.13)$$

$$\left(\frac{2\pi}{60} \right)^2 RN^2 = g \cos \theta \quad \cdots(6.1.14)$$

$$N = \sqrt{\frac{g \cos \theta}{(2\pi/60)^2 (D_G - d_B)/2}} \quad \left[R \equiv \frac{D_G}{2} - \frac{d_B}{2} \right] \quad \cdots(6.1.15)$$

$$N = 42.3 \sqrt{\frac{\cos \theta}{D_G - d_B}} \quad \cdots(6.1.16)$$



粉碎媒体がミルの頂点($\theta=90^\circ$)でミル本体から離れるときの回転速度が臨界回転速度 N_c [rpm]となる。

$$N_c = \frac{42.3}{\sqrt{D_G - d_B}} \quad \dots(6.1.17)$$

この値よりも大きいと粉砕媒体はミル本体と一体となって回転するため、ほとんど粉砕が起らない。実際の回転速度 N [rpm] は、上式の 60~80% に設定する。

③処理能力 ボールミルの処理能力 Q [t/h] は、粉砕所要動力の式より導く。

$$P = \frac{WM}{\tau} \quad [\text{kW}] \quad \dots(6.1.18)$$

$$Q \left(\equiv \frac{M}{\tau} \right) = \frac{P}{W} \quad [\text{t/h}] \quad \dots(6.1.19)$$

$$W = 10W_i \left(\frac{1}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{1}{\sqrt{F_{80}}} \right) C \quad \dots(6.1.20)$$

ただし、 C は補正係数[-]、 M は碎料の仕込み量[t]、 Q は処理能力[t/h]、 W は粉砕仕事量[kWh/t]、 W_i は粉砕仕事指数[kWh/t]、 τ は回分時間[h] (連続の場合は $M/\tau=Q$ とおく)。

補正係数 C は、次の方法で求める。[文献 41-47]

$$C = C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4 \times C_5 \times C_6 \times C_7 \times C_8 \quad \dots(6.1.21)$$

C_1 は粉砕条件に関する補正因子であり、乾式粉砕の場合は 1.3、湿式粉砕の場合は 1。

C_2 は粉砕条件と粉砕回路に関する補正因子であり、乾式粉砕の場合は 1、湿式閉回路粉砕の場合は 1、湿式開回路粉砕の場合は図上で推定する。

C_3 はミル径 D_G [m] に関する補正因子であり、次式で求める。

$$(D_G < 3.81 \text{ m}) \quad C_3 = \left(\frac{2.44}{D_G} \right)^{0.2} \quad \dots(6.1.22)$$

$$(D_G \geq 3.81 \text{ m}) \quad C_3 = 0.914 \quad \dots(6.1.23)$$

C_4 は碎料粒子径 F_{80} [μm] に関する補正因子であり、次式で求める。

$$(F_{80} \geq F_{\text{opt}}) \quad C_4 = 1 + \frac{1}{R_{80}} \left(\frac{W_i}{1.1} - 7 \right) \left(\frac{F_{80}}{F_{\text{opt}}} - 1 \right) \quad \dots(6.1.24)$$

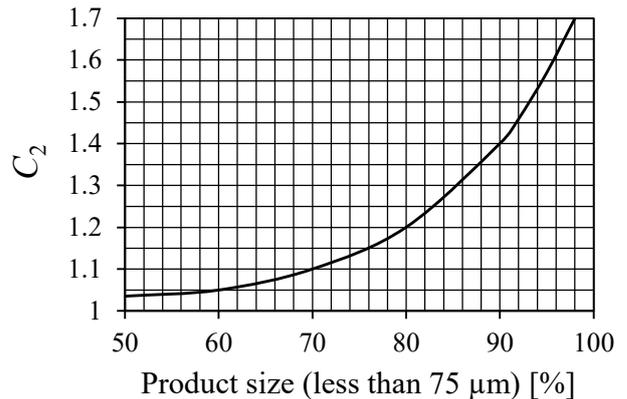
$$\left[R_{80} \equiv \frac{F_{80}}{P_{80}}, (\text{ball mill}) F_{\text{opt}} \equiv 4000 \sqrt{\frac{14.3}{W_i}}, (\text{rod mill}) F_{\text{opt}} \equiv 16000 \sqrt{\frac{14.3}{W_i}} \right]$$

$$(F_{80} < F_{\text{opt}}) \quad C_4 = 1 \quad \dots(6.1.25)$$

ただし、 F_{opt} は碎料の最適粒子径 [μm]、 F_{80} は碎料の 80% 通過粒子径 [μm]、 R_{80} は粉砕比 [-] (20~200)。

C_5 は碎製物粒子径 P_{80} [μm] (微粉砕の影響) に関する補正因子であり、次式で求める。

$$(P_{80} < 75 \mu\text{m}) \quad C_5 = \frac{P_{80} + 10.3}{1.145 P_{80}} \quad \dots(6.1.26)$$



$$(P_{80} \geq 75 \mu\text{m}) \quad C_5 = 1 \quad \dots(6.1.27)$$

ただし、 P_{80} は碎製物の 80%通過粒子径[μm]。

C_6 は粉砕比 R [-]に関する補正因子であり、次式で求める。

$$(R - R^* \leq -2) \quad C_6 = 1 + \frac{(R - R^*)^2}{150} \quad [R^* \equiv 8 + 5(L_G/D_G)] \quad \dots(6.1.28)$$

$$(-2 < R - R^* < 2) \quad C_6 = 1 \quad \dots(6.1.29)$$

$$(2 \leq R - R^*) \quad C_6 = 1 + \frac{(R - R^*)^2}{150} \quad [R^* \equiv 8 + 5(L_G/D_G)] \quad \dots(6.1.30)$$

C_7 はボールミル粉砕比 R [-]に関する補正因子であり、次式で求める。

$$(R < 6) \quad C_7 = 1 + \frac{0.13}{R - 1.35} \quad \dots(6.1.31)$$

$$(R \geq 6) \quad C_7 = 1 \quad \dots(6.1.32)$$

C_8 はロッドミルの碎料条件に関する補正因子であり、開回路粉砕の場合は 1.4、閉回路粉砕の場合は 1.2、ボールミルの場合は 1。

④粉砕所要動力 次元解析に基づく Rose & Sullivan の式を用いる。[文献 33, 34]

$$\frac{P}{D_G^5 N^3 \rho_B} = K \left(1 + \frac{0.4 \rho_p}{\rho_B} \right) \left(\frac{L_G}{D_G} \right) \left(\frac{N_c}{N} \right)^2 f(J_B) \quad \dots(6.1.33)$$

ただし、 D_G はミル径[m]、 $f(J_B)$ は充填率関数、 J_B はミル内における粉砕媒体のホールドアップ(空隙部を含めた体積分率) [-]、 K は装置条件に関する定数(約 3.40)、 L_G はボールミル長[m]、 N はミル回転速度[1/s]、 N_c は臨界回転速度[1/s]、 P は粉砕所要動力[W]、 ρ_B は粉砕媒体(ボール)密度[kg/m^3]、 ρ_p は碎料密度[kg/m^3]。

充填率関数 $f(J_B)$ は、図上で推定する。粉砕媒体のホールドアップ J_B [-] は、次式のように導かれる。

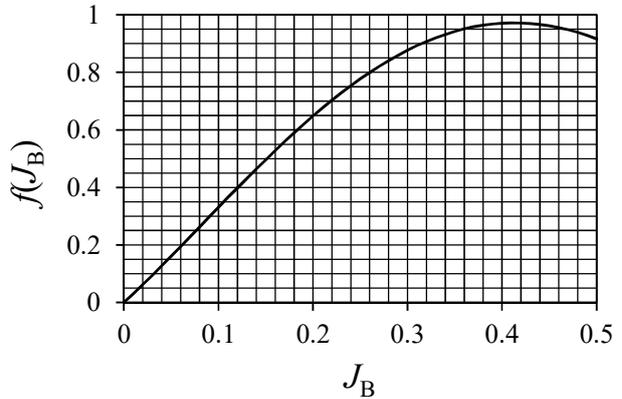
$$J_B = \frac{V_B + V_e}{V_G} \quad \dots(6.1.34)$$

$$J_B = \frac{(M_B/\rho_B) + (M_B/\rho_B)[\varepsilon/(1-\varepsilon)]}{V_G} \quad \dots(6.1.35)$$

$$J_B = \frac{(M_B/\rho_B)[1 + \{\varepsilon/(1-\varepsilon)\}]}{V_G} \quad \dots(6.1.36)$$

$$J_B = \frac{(M_B/\rho_B)[1/(1-\varepsilon)]}{V_G} \quad \dots(6.1.37)$$

$$J_B = \frac{M_B}{\rho_B V_G (1-\varepsilon)} \quad \dots(6.1.38)$$



ただし、 M_B は粉砕媒体(ボール)の充填量[kg]、 V_B は粉砕媒体の体積[m^3]、 V_e は空隙部の体積[m^3]、 V_G はミル容積[m^3]、 ε は媒体間空隙率[-]。

空隙率 ε について、Rose & Sullivan は 0.4 を仮定して粉砕動力式を導いているので、この値を用いる。

【問題】 ボールミルの設計

石灰岩を転動ボールミルで回分粉砕する。①ミル容積 V_G [m^3]、②ミル径 D_G [mm]、③ミル長 L_G [mm]、④粉砕媒体密度 ρ_B [kg/m^3]、⑤粉砕媒体径 d_B [mm]、⑥ミル回転速度 N [rpm]、⑦粉砕仕事量 W [kWh/t]、

⑧粉砕所要動力 P [kW]、⑨処理能力 Q [t/h] を求めよ。(①22.6 m³, ②2431 mm, ③4861 mm, ④6238 kg/m³, ⑤76.1 mm, ⑥22 rpm, ⑦9.24 kWh/t, ⑧311 kW, ⑨33.7 t/h)

砕料	石灰岩	ミル長—ミル径比 L_G/D_G	2
砕料密度 ρ_p	2.66 t/m ³	ミル容積 V_G	砕料体積の 5 倍
砕料の仕込み量 M	12 t	粉砕媒体	ボール
砕料の 80%通過粒子径 F_{80}	10 mm	粉砕媒体の充填量 M_B	30 t
粉砕方式	乾式	ミル回転速度 N	臨界値の 80%
粉砕回路	閉回路	粉砕比 R_{80}	20

6. 2 ロッドミル

ロッド径 d_B [mm] は、Bond の式を用いる。[文献 31, 32, 48]

$$d_B = 25.4 \left(\frac{F_{80}^{0.75}}{160} \right) \sqrt{\frac{\rho_p W_i}{(100N/N_c) \sqrt{3.281 D_G}}} \quad \dots(6.2.1)$$

ただし、 D_G はミル径[m]、 F_{80} は砕料の 80%通過粒子径[μm]、 W_i は仕事指数[kWh/t]、 N はミル回転速度[rpm]、 N_c は臨界回転速度[rpm]、 ρ_p は砕料密度[t/m³]。

処理能力 Q [t/h] は、ボールミルと同様の手順にしたがう。

7. 粉砕プロセス

7. 1 開回路粉砕

粉砕機から出た砕料をリサイクルしない場合に相当する。いま、粉砕機 1 に砕料 $F=100$ t/h が入り、目的成分である微粉が 60% ($x_U=0.6$) 含まれる状態で分級機 (効率 $\eta=0.8$) に入る。そこからふるい上流れ O [t/h] とふるい下流れ U [t/h] に分かれる。ふるい上流れは粉砕機 2 に入ってさらに粉砕され、ふるい下流れと合流して砕製物 $P=100$ t/h を製造している。このときのふるい上流れ O [t/h] とふるい下流れ U [t/h] を求める。ただし、ふるい上基準の分級機効率 η は、分級機へ入る砕料流れ中のふるい上成分量とふるい上流れの比で定義する。[文献 49]

$$\text{(全物質収支)} \quad F=O+U$$

$$\text{(ふるい上成分収支)} \quad F(1-x_U)=O\eta$$

ふるい上成分収支より

$$O=F(1-x_U)/\eta=(100)(1-0.6)/0.8=\boxed{50 \text{ t/h}}$$

全物質収支より

$$U=F-O=100-50=\boxed{50 \text{ t/h}}$$

7. 2 閉回路粉砕

粉砕機から出た砕料をリサイクルする場合に相当する。粉砕機内の滞留時間を短くして過粉砕を抑制できる点、目的粒径の砕製物を効率良く製造できる点で有利である。いま、粉砕機に砕料 $F=100$ t/h とリサイクル流れ R [t/h]が入り、目的成分である微粉が 40% ($x_U=0.4$) 含まれる状態で分級機(効率 $\eta=0.9$)に入る。そこから循環流量比 CI (サーキュレーションローディングという)でリサイクル流れ(ふるい上流れ) R [t/h]とふるい下流れに分かれ、砕製物(ふるい下流れ) $P=100$ t/h を製造している。このときの循環流量比 CI [-]とリサイクル流れ R [t/h]を求める。ただし、ふるい上基準の分級機効率 η は、分級機へ入る砕料流れ中のふるい上成分量とふるい上流れの比で定義する。【文献 49】

(全物質収支) $F=P$

(ふるい上成分収支) $(F+R)(1-x_U)=R\eta$

(循環流量比) $CI=R/F$

ふるい上成分収支より

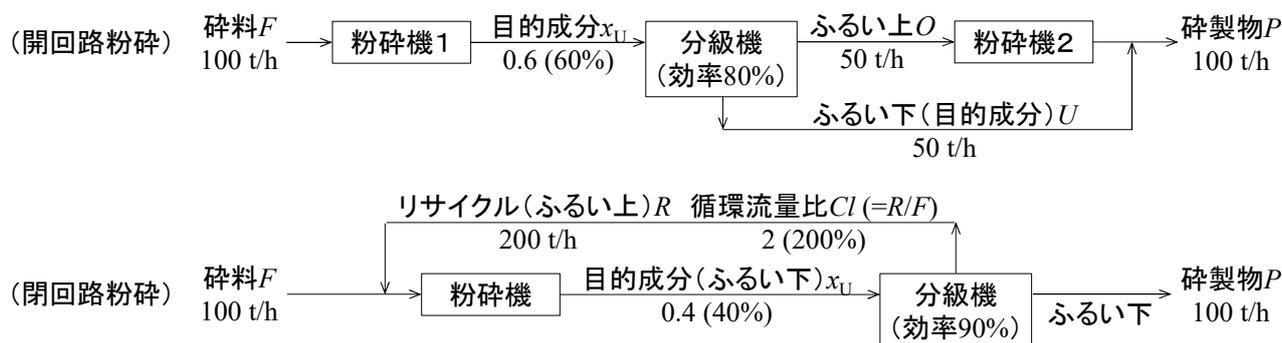
$$R=(F+R)(1-x_U)/\eta$$

$$1=(F/R+1)(1-x_U)/\eta=[1/(R/F)+1](1-x_U)/\eta=[(1/CI)+1](1-x_U)/\eta$$

$$1/CI=[\eta/(1-x_U)]-1$$

$$CI=1/[\{\eta/(1-x_U)\}-1]=1/[\{(0.9)/(1-0.4)\}-1]=2$$

$$R=F \cdot CI=(100)(2)=200 \text{ t/h}$$



※分級機効率(ふるい上基準)=分級機に入る砕料流れ中のふるい上成分量/ふるい上流れ

図 7.1 粉砕プロセスの計算例

【問題】粉砕プロセス

閉回路の粉砕機に砕料 $F=100$ t/h とリサイクル流れ R [t/h]が入り、目的成分である微粉が 20% ($x_U=0.2$) 含まれる状態で分級機に入る。そこから循環流量比 $CI=20$ でリサイクル流れ(ふるい上) R [t/h]とふるい下流れに分かれ、砕製物(ふるい下) $P=100$ t/h を製造している。このときのふるい上基準分級機効率 η [%]を求めよ。(84%)

参考文献

- [1] 横堀武夫; 材料強度学, 岩波全書(1964)1.2 章
- [2] 小林英男; 破壊力学, 共立出版(1993)1 章

- [3] T.L. Anderson(著), 栗飯原周二(監訳), 金田重裕(訳), 吉成仁志(訳); 破壊力学 第3版, 森北出版(2011)2章
- [4] 八嶋三郎(編); 粉砕と粉体物性, 培風館(1986)1章
- [5] A.A. Griffith; *Phyl. Trans. Roy. Soc.*, **221**(1920)163
- [6] 横堀武夫; 材料強度学, 岩波全書(1964)5章
- [7] 小林英男; 破壊力学, 共立出版(1993)3.3章
- [8] H. Hertz; *J. reine und angewandte Mathematik*, **92**(1882)156-171
- [9] S.P. Timoshenko(著), J.N. Goodier(著), 金多潔(監訳), 荒川宗夫(訳), 坂口昇(訳), 森哲郎(訳); 弾性論, コロナ社(1973)pp.423-434
- [10] K.L. Johnson; *Contact Mechanics*. Cambridge University Press(1985)Chapter 4
- [11] J. Halling(編), 松本有史(訳), 佐々木貞夫(訳), 河内康伸(訳), 東条徹(訳), 杉原和佳(訳); トライボロジ, 近代科学社(1984)3章
- [12] H. Rumpf; *Chem. Ing. Tech.*, **31**(1959)323
- [13] 平松良雄, 岡行俊, 木山英郎; 日本鉱業会誌, **81**(1965)1024-1030
- [14] 神田良照, 佐野茂, 斉藤文良, 八嶋三郎; 化学工学論文集, **10**(1984)108-112
- [15] 八嶋三郎(編); 粉砕と粉体物性, 培風館(1986)pp.55-62
- [16] 有光 隆; これならわかる図解でやさしい入門材料力学 第2版, 技術評論社(2020)
- [17] P.R. Ritinger; *Lehrbuch der Aufbereitungskunde*, Berlin(1867)
- [18] F. Kick; *Das Gesetz der proportionalen Widerstände und seine Anwendungen*, Leipzig(1885)
- [19] F.C. Bond, *Trans. AIME*, **193**(1952)484-494
- [20] F.C. Bond, *Trans. AIME*, **196**(1953)315
- [21] W.H. Walker, W.K. Lewis, W.H. McAdams, E.R. Gilliland; *Principles of Chemical Engineering*, 3rd Ed. McGrawHill(1937)
- [22] 田中達夫; 化学工学, **18**(1954)160-171
- [23] H.E. Rose and J.E. English; *Trans. IMM*, **76**(1967)C32-C43
- [24] A. Gupta and D. Yan; *Mineral processing design and operations* 2nd Ed., Elsevier (2016)Chapter 4
- [25] A. Gupta and D. Yan; *Mineral processing design and operations* 2nd Ed., Elsevier (2016)Chapter 5
- [26] J. Broman; *Eng. Mining J.*, **185**(1984)69-71
- [27] A. Gupta and D. Yan; *Mineral processing design and operations* 2nd Ed., Elsevier (2016)Chapter 6
- [28] V. Rao, S. Patel, A. Lele; *Mineral Processing* (2019)Chapter 4.3
- [29] Wertheim; *Z. d. Osterr. Ing. Vereins S.* (1862) p.17
- [30] 亀井三郎; 増補 粉砕, 産業図書(1943) p.115
- [31] F.C. Bond; *British. Chem. Eng.*, **6**(1961)378-385
- [32] F.C. Bond; *British. Chem. Eng.*, **6**(1961)543-548
- [33] H.E. Rose and R.M.E. Sullivan; *Treatise on the Internal Mechanization of Ball, Tube and Rod Mills*, Constable (1958)
- [34] H.E. Rose and R.M.E. Sullivan; *Vibration Mills and Vibration Milling*, Constable (1961)
- [35] C.A. Rowland and D.M. Kjos In: L.M. Mular, R.B. Bhappu Eds.; *Mineral processing plant design*, SME/AIME (1980)
- [36] S.K. Jain; *Mineral Processing* 2nd Ed., CBS (2001)Chapter 6
- [37] A. Gupta and D. Yan; *Mineral processing design and operations* 2nd Ed., Elsevier (2016)Chapter 7,8
- [38] B.A. Wills, J.A. Finch; *Mineral Processing Technology* 8th Ed., Elsevier (2016)Chapter 7
- [39] V. Rao, S. Patel, A. Lele; *Mineral Processing* (2019)Chapter 5
- [40] 藤田 重文, 東畑平一郎(編); 化学工学II 第2版「機械的操作」, 東京化学同人(1972)6.2章
- [41] F.C. Bond; *AIME.Trans.*, **211**(1958)592-595
- [42] C.A. Rowland and D.M. Kjos In: L.M. Mular, R.B. Bhappu Eds.; *Mineral processing plant design*, SME/AIME (1980) p.239-278
- [43] L.G. Austin, R.R. Klimpel, P.T. Luckie; *Process engineering of size reduction: ball milling*, SME/AIME (1984)
- [44] A. Gupta and D. Yan; *Mineral processing design and operations* 2nd Ed., Elsevier (2016) pp.251-254
- [45] C.L. Prasher; *Crushing and Grinding Process Handbook*, John Wiley & Sons Ltd. (1987) pp.220-222
- [46] 伊藤光弘; 粉体機器・装置ハンドブック, 日刊工業新聞社(1995)3.1章
- [47] 坂下 攝; 粉体プロセス設計-演習ノート- 月刊「化学装置」別冊, 工業調査会(1999) pp.56-57
- [48] F.C. Bond; *Eng. Mining J.*, **161**(1960)82-85
- [49] D.V. Subba Rao; *Minerals and Coal Process Calculations*, CRC Press(2016)Chapter10.3

教科書

(下線は推薦図書)

- [1] 横堀武夫; 材料強度学, 岩波全書(1964)
- [2] S.P. Timoshenko(著), J.N. Goodier(著), 金多潔(監訳), 荒川宗夫(訳), 坂口昇(訳), 森哲郎(訳); 弾性論, コロナ社(1973)
- [3] 八嶋三郎(編); 粉碎と粉体物性, 培風館(1986)
- [4] 小林英男; 破壊力学, 共立出版(1993)
- [5] T.L. Anderson(著), 栗飯原周二(監訳), 金田重裕(訳), 吉成仁志(訳); 破壊力学 第3版, 森北出版(2011)
- [6] A.F. Taggart; Handbook of Mineral Dressing, John Wiley & Sons Inc (1945)
- [7] H.E. Rose and R.M.E. Sullivan; Treatise on the Internal Mechanization of Ball, Tube and Rod Mills, Constable (1958)
- [8] H.E. Rose and R.M.E. Sullivan; Vibration Mills and Vibration Milling, Constable (1961)
- [9] F.C. Bond; *British. Chem. Eng.*, 6(1961)378-385
- [10] F.C. Bond; *British. Chem. Eng.*, 6(1961)543-548
- [11] H.E. Rose and J.E. English; *Trans. IMM*, 76(1967)C32-C43
- [12] C.A. Rowland and D.M. Kjos In: L.M. Mular, R.B. Bhappu Eds.; Mineral processing plant design, SME/AIME (1980)
- [13] L.G. Austin, R.R. Klimpel, P.T. Luckie; Process engineering of size reduction: ball milling, SME/AIME (1984)
- [14] C.L. Prasher; Crushing and Grinding Process Handbook, John Wiley & Sons Ltd. (1987)
- [15] K.S. Kawatra; Comminution Practices, Society for Mining Metallurgy (1997)
- [16] S.K. Jain; Mineral Processing 2nd Ed., CBS (2001)
- [17] D.V. Subba Rao; Minerals and Coal Process Calculations, CRC Press(2016)
- [18] A. Gupta and D. Yan; Mineral processing design and operations 2nd Ed., Elsevier (2016) ※推奨
- [19] B.A. Wills, J.A. Finch; Mineral Processing Technology 8th Ed., Elsevier (2016)
- [20] K.D. Patil; Mechanical Operations, Nirali Prakashan(2018)
- [21] V. Rao, S. Patel, A. Lele; Mineral Processing (2019)
- [22] 亀井三郎; 増補 粉碎, 産業図書(1943)
- [23] 高桑健; 選鉱工学, 共立出版(1944)
- [24] 中野実(監修), 下村弥太郎(監修), 斎藤平吉(監修), 伏見弘(著); 鉱山読本 第5巻(選鉱編) 第26集, 技術書院(1961)
- [25] 藤田重文, 東畑平一郎(編); 化学工学II 第2版「機械的操作」, 東京化学同人(1972)
- [26] 亀井三郎(編); 化学機械の理論と計算 第2版, 産業図書(1975)
- [27] 井伊谷鋼一(編); 粉体工学ハンドブック, 朝倉書店(1965)
- [28] 粉体工学会(編); 粉体工学便覧, 日刊工業新聞社(1986)
- [29] 化学工学協会(編); 化学工学便覧 改訂四版, 丸善(1978)
- [30] 化学工学協会(編); 化学工学便覧 改訂五版, 丸善(1988)
- [31] 伊藤光弘; 粉体機器・装置ハンドブック, 日刊工業新聞社(1995)
- [32] 林 恒美; 粉体技術ポケットブック, 工業調査会(1996)
- [33] 坂下 攝; 粉体プロセス設計ー演習ノートー 月刊「化学装置」別冊, 工業調査会(1999)

令和5年04月28日作成

令和5年05月15日改訂

令和5年05月30日改訂

令和5年06月04日改訂

令和6年05月20日改訂