

材料力学基礎

化学工学の設計計算と言えば、蒸留塔の高さや反応器の装置容積などが想起される。これらは、理論段数や反応時間など、装置性能に関わる設計因子に基づいて決められることから、**性能設計**と呼ばれる。そのほか、外気からの風圧や内部圧に耐えるには蒸留塔の壁の肉厚を何ミリにすればよいか、反応器本体を支える土台や攪拌軸にかかる力はどのくらいかといった、いわゆる**構造設計**が必要となる。このあたりの設計理論は、**材料力学**に基づき体系化されている。材料力学とは、ある部材が外力を受けたとき、どのくらいの力が部材の内部にかかり、どの程度部材が変形するのかを計算する学問である。このように、化学装置の設計は、本来、性能設計(化学工学)と構造設計(機械工学)の両面から行うものである。

大正から昭和初期にかけての化学工学は、**化学機械学**と呼ばれ、単一の化学装置を設計するための学問、という意味合いが強かった。戦後は、石油化学コンビナートのように、個々の化学装置を連結する必要が出てきて、一連の化学プラント群をシステムとして扱う**プロセスシステム工学**が発達した。そういうわけで、現在の化学工学は、「木(単一の化学装置)」を見ることも「森(プロセス全体)」を見ることもできる学問体系として確立されている。かつての化学機械学は、狭い意味での化学工学と言える。

1～4章は、材料力学の成書[文献1～8]を参考にした。

1. 応力とひずみ

1. 1 外力と内力

部材に対して外から加わる力を**外力**という。外力の種類には、部材に負荷を与える**荷重(かじゅう)**と部材を支える**反力**がある。荷重の種類には、**引張荷重**、**圧縮荷重**、**せん断荷重**、**曲げ荷重**、**ねじり荷重**があり、部材の一点に外力がかかる**集中荷重**と、部材全体に外力がかかる**分布荷重**とに区別される。分布荷重は、部材の自重のように位置によらずどこも等しく外力がかかる場合と、水圧のように位置によって外力の大きさが異なる場合とがある。部材に外力を加えると、部材の内部で外力につり合う力が生じる。これを**内力**といい、[N]の単位で表される。実用上は、単位面積あたりの内力、すなわち**応力**が用いられる。単位は、[N/m²]または[Pa]である。応力には、部材内部の断面に対して垂直に作用する**垂直応力**(あるいは、**鉛直応力**)と、水平に作用する**せん断応力**がある。

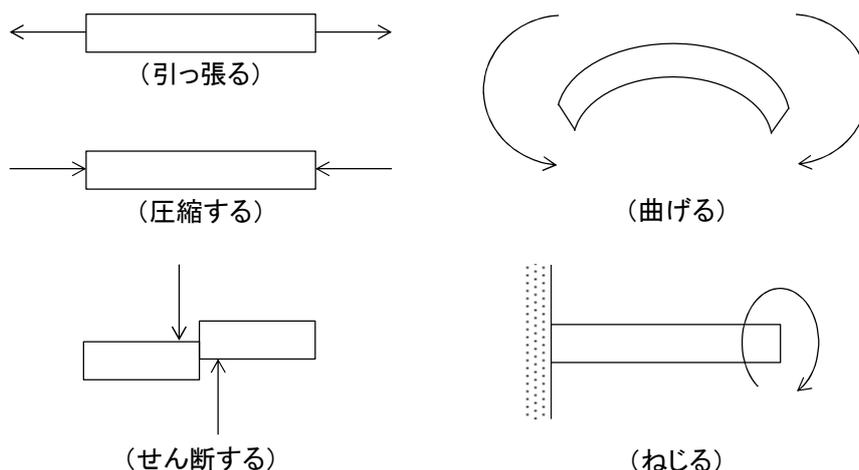


図 1.1.1 部材に作用する外力の例

1. 2 応力

丸棒が外力 P [N] で両端から垂直方向に引っ張られているとする。この場合の丸棒に作用する外力は、**引張荷重**とよばれる。このとき、部材内部のある位置で切り出した仮想的な断面では、部材断面積あたりの荷重、すなわち応力が仮想断面に対して垂直かつ一様に分布して外力とつり合いを保っている。この場合の応力は、垂直応力となる。上と下の仮想断面にはたらく垂直応力の方向は、それぞれ荷重と反対の方向になる。かりに同じ向きだと、仮想断面から部材が上と下とに勝手に分裂して移動してしまうことになる。そのようなことは、現実には起こらない。自分で鉛筆の両端を持って両手で引っ張ってみたところで、鉛筆が自然と上と下へ分裂していくはずはないのだから。部材の断面積を A [m²] とすると、垂直応力 σ [N/m²] は、次式で表される。

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \cdots(1.2.1)$$

引張の方向とは反対に、丸棒が上下から押さえつけられている場合の外力と部材内部に作用する応力は、それぞれ**圧縮荷重・圧縮応力**と呼ばれる。

いま、横たわった丸棒を上と下から外力 P [N] ではさみこんで、ずらそうとしている。(部材を平行四辺形状にゆがませようとしている。ハサミで切ろうとするのと同じ状況。刃の当たる位置が外力の作用点となる。)この場合の丸棒に作用する外力は、**せん断荷重**とよばれる。このとき、部材内部のある位置で切り出した仮想的な断面では、応力が仮想断面に対して水平かつ一様に分布して外力とつり合いを保っている。この場合の応力は、せん断応力となる。せん断応力 τ [N/m²] は、次式で表される。

$$\tau = \frac{P}{A} \quad \cdots(1.2.2)$$

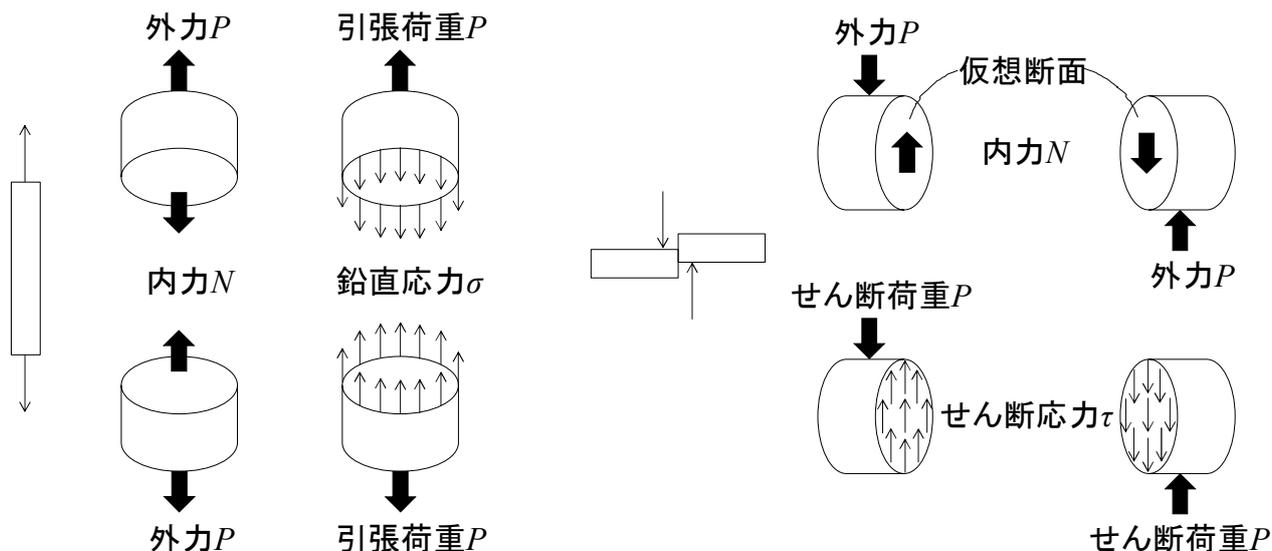


図 1.2.1 応力の説明図
(左)鉛直応力、(右)せん断応力

1. 3 ひずみ

部材長さあたりの伸び量を**ひずみ**といい、元の寸法からの変形量割合を意味する。長さ l [m] の丸棒に対して縦方向に引張荷重を作用させたとき、 Δl だけ伸びた場合の**縦ひずみ** ε [-] は、次式で表される。

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \cdots(1.3.1)$$

横方向は、荷重方向に対して垂直に縮むことになる。幅 b [m] の丸棒が Δb だけ縮んだ場合の**横ひずみ** ε' [-] は、次式で表される。

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} \quad \cdots(1.3.2)$$

縦ひずみ ε と横ひずみ ε' の比を**ポアソン比** ν [-] といい、部材の材質に依存する。

$$\nu = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \quad \cdots(1.3.3)$$

$$\boxed{\nu = -\frac{\Delta l/l}{\Delta b/b}} \quad \cdots(1.3.4)$$

負号を付す理由は、 Δb が負となるためである。負号の代わりに絶対値で定義しているものもある。

片方の端が固定された丸棒の先端にせん断荷重を作用させたとき、 Δl だけ部材がずれた場合の**せん断ひずみ** γ [-] は、次式で表される。

$$\gamma = \frac{\Delta l}{l} \quad \cdots(1.3.5)$$

ひずみ角 θ [rad] の正接(tan)は、次式で表される。

$$\tan \theta = \frac{\Delta l}{l} (= \gamma) \quad \cdots(1.3.6)$$

$\tan \theta$ のテーラー展開は、次式で表される。

$$\tan \theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \dots \quad \dots(1.3.7)$$

一般に、 θ は非常に小さいことから、上式より $\tan \theta \approx \theta$ が成り立つ。

$$\theta = \gamma \quad \dots(1.3.8)$$

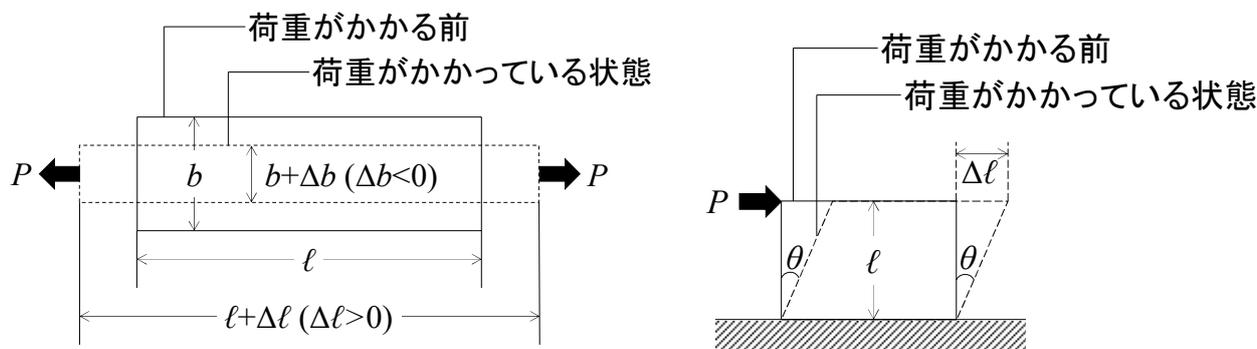


図 1.3.1 ひずみの説明図
(左)縦ひずみと横ひずみ、(右)せん断ひずみ

1. 4 フックの法則

吊り下げた部材に対して鉛直下向き方向に引張荷重 P を加えたとき、部材が $\Delta \ell$ だけ伸びたとする。この伸び量は、荷重に比例することから、 k を比例定数として次式で表される。

$$P = k\Delta \ell \quad \dots(1.4.1)$$

引張荷重 P の式と縦ひずみ ε の式を用いると、次式のようになる。

$$\sigma A = k\varepsilon \ell \quad \dots(1.4.2)$$

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon} \left[E \equiv \frac{k\ell}{A} \right] \quad \dots(1.4.3)$$

E は縦弾性係数(あるいは、ヤング率)[N/m²]であり、部材の材質に依存する。

上式のように、部材内部にかかる鉛直応力 σ と部材のひずみ ε は、比例関係にある。これをフックの法則という。

せん断ひずみの場合と同じように、片方の端が固定された部材にせん断荷重 P を加えたとき、部材が $\Delta \ell$ だけずれたとする。このずり量は、荷重に比例することから、次式で表される。

$$P = k\Delta \ell \quad \dots(1.4.4)$$

せん断荷重 P の式とせん断ひずみ γ の式を用いると、次式のようになる。

$$\tau A = k\gamma \ell \quad \dots(1.4.5)$$

$$\boxed{\tau = G\gamma} \left[G \equiv \frac{k\ell}{A} \right] \quad \dots(1.4.6)$$

G は横弾性係数(あるいは、剛性率)[N/m²]であり、部材の材質に依存する。

表 1.4.1 おもな工業材料の弾性係数[文献 5]

材料	縦弾性係数 E [GPa]	横弾性係数 G [GPa]	ポアソン比 ν [-]
軟鋼	206	82	0.29
鋳鉄	157	61	0.26
銅	123	46	0.34
黄銅	100	37	0.35
アルミニウム	73	26	0.34
ガラス	71	29	0.35

1. 5 応力-ひずみ線図

軟鋼材からなる、断面形状が一樣の棒の両端に引張荷重をゆっくりと加えてゆく(引張試験)。比例限度(点A)に達するまでは、応力とひずみが比例関係にある。弾性限度(点B)までは、応力を解除することで、ひずみ(部材の変形)がもとに戻る。外力と取り去ると元の形状に戻る性質を弾性といい、戻らない性質を塑性という。さらに荷重をかけてゆくと、応力はあまり変化しないが、ひずみが急激に増大する現象が起こる。これを降伏といい、降伏が起こる点を降伏点(点Cおよび点D)という。降伏点には、上(じょう)降伏点(点C)と下(か)降伏点(点D)があり、たんに降伏点という場合は、上降伏点を指す。一般には、部材の応力が降伏点を超過しないように設計を行うが、軟鋼材以外の部材では、明確な降伏点が出ないものもある。その場合は、0.2%のひずみが残る点(耐力という)を設計の基準値とする。さらに荷重をかけてゆくと、やがて最大応力に達する。この点を引張強さまたは極限強さ(点E)という。それ以降は、棒の局部でくびれが生じて、そこに応力が集中し、やがて破断する。破断が起こる点を破断強さ(点F)という。

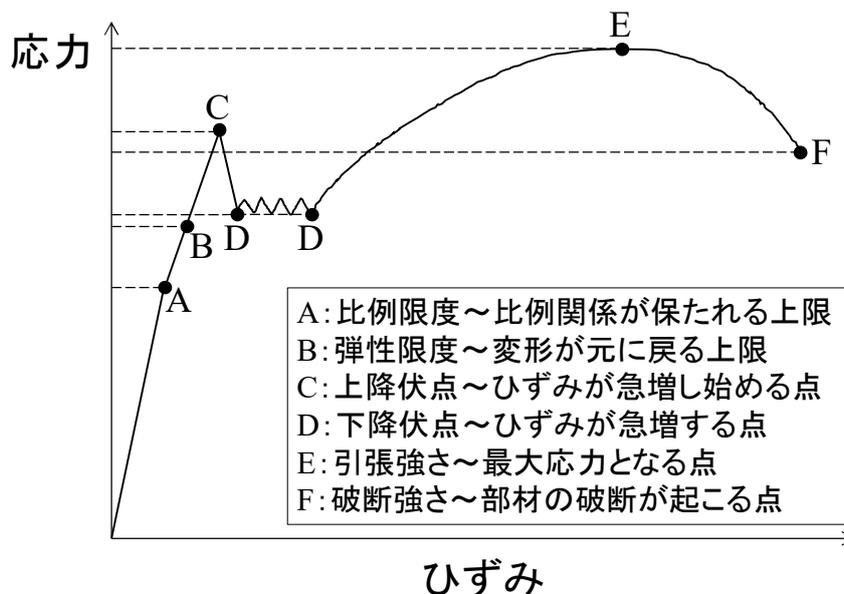


図 1.5.1 応力-ひずみ線図

1. 6 許容応力

機械類は、使用時にかかる引張荷重に対して部材の強度が十分となるように設計される。また、荷重が解消された後も、ひずみが残らないようにしている。安全が保証される引張荷重の最大値(ここまでの荷重ならば、かけても十分に安全)を許容応力 σ_a [Pa] という。いま、部材に生じる引張応力が σ [Pa] であるとき、部材が安全であるには次式が成り立つ必要がある。

$$\sigma \leq \sigma_a \quad \cdots(1.6.1)$$

許容応力 σ_a は、降伏点や引張強さなどの基準応力 σ_s [Pa] に基づき、それよりも十分に余裕を持たせて(値を小さくして)設定される。工学的には、余裕分に相当する安全率 f [-] を基準応力より割り算して決定される。

$$\sigma_a = \frac{\sigma_s}{f} \quad [f > 1.0] \quad \cdots(1.6.2)$$

f が大きいほど設計上の余裕がある(機械的強度が高い)。どの程度余裕を持たせるか(f をいくらにするか)は、その製品の設計者が決める。一般には、静荷重がかかる場合は1桁、衝撃荷重がかかる場合は2桁を取る。

1. 6 内圧を受ける薄肉円筒

板厚(いたあつ)が内径の12%以下、あるいは外径の10%以下の円筒を薄肉(うすにく)円筒という。工業的には、塔槽類などの圧力容器や配管設備で用いられることが多い。いま、直径 D_T [mm]、高さ L_T [mm]、板厚 t_T [mm] の薄肉円筒に内圧 P_i [MPa] または [N/mm²] が作用するとき、円筒の壁内部には円筒を破断しようとする軸応力 σ_L [MPa] と円周応力(またはフープ応力) σ_θ [MPa] の2種類の引張応力が生じる。このとき、内圧が円筒の断面に及ぼす力 F_L [N] は、次式で表される。

$$F_L = P_i \left(\frac{\pi D_T^2}{4} \right) \quad \cdots(1.6.1)$$

この力は、軸応力 σ_L が円筒壁内部において軸方向に作用する力に等しい。

$$F_L = \sigma_L (\pi D_T t_T) \quad \cdots(1.6.2)$$

双方の力はつりあっていることから、2式を等置すると、板厚 t_T [mm] を得る。

$$\sigma_L (\pi D_T t_T) = P_i \left(\frac{\pi D_T^2}{4} \right) \quad \cdots(1.6.3)$$

$$\boxed{t_T = \frac{P_i D_T}{4 \sigma_L}} \quad \cdots(1.6.4)$$

一方、内圧が円筒の投影面(投影面積 $D_T L_T$)に及ぼす力 F_θ [N] は、次式で表される。

$$F_\theta = P_i D_T L_T \quad \cdots(1.6.5)$$

この力は、円周応力 σ_θ が円筒壁内部において円周方向に作用する力に等しい。

$$F_\theta = 2 \sigma_\theta L_T t_T \quad \cdots(1.6.6)$$

双方の力はつりあっていることから、2式を等置すると、板厚 t_T [mm] を得る。

$$2\sigma_{\theta}L_T t_T = P_i D_T L_T \quad \cdots(1.6.7)$$

$$t_T = \frac{P_i D_T}{2\sigma_{\theta}} \quad \cdots(1.6.8)$$

板厚 t_T の2式を等置すると、次式が導かれる。

$$\frac{P_i D_T}{4\sigma_L} = \frac{P_i D_T}{2\sigma_{\theta}} \quad \cdots(1.6.9)$$

$$\sigma_{\theta} = 2\sigma_L \quad \cdots(1.6.10)$$

軸応力、円周応力ともに円筒を破断しようとする応力であることから、いずれか大きい方に合わせて板厚を計算すればよい。軸応力よりも常に大きい円周応力の式を用いる。

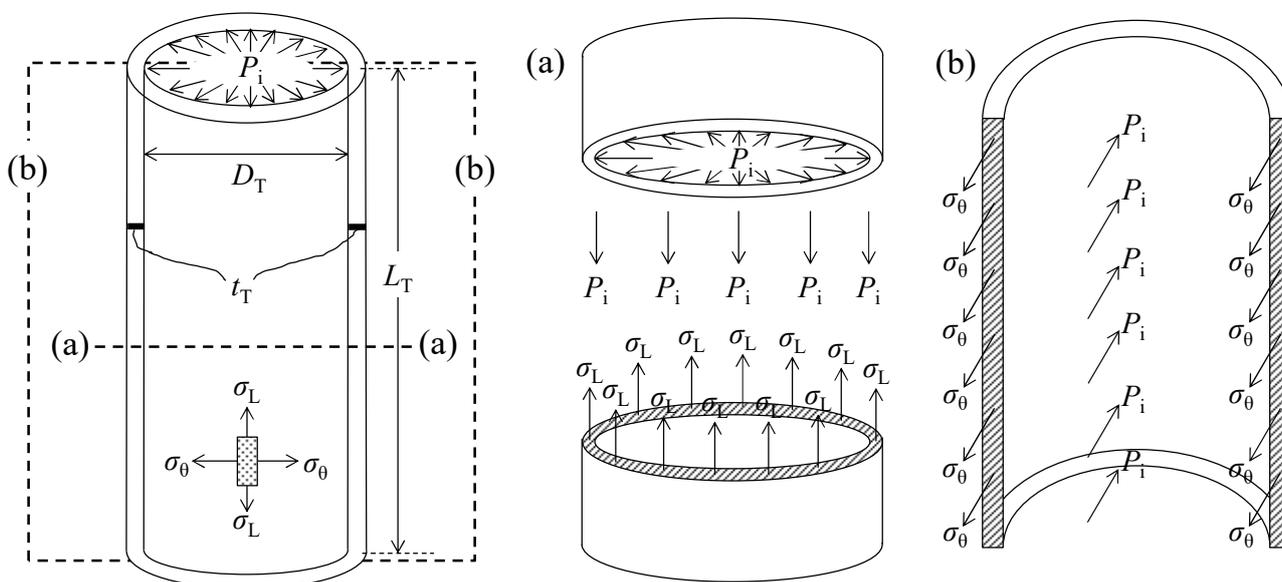


図 1.6.1 薄肉円筒にかかる引張応力[文献 9]

2. はりの曲げ

2. 1 せん断力と曲げモーメント

荷重を受けて曲げられる細い棒を**はり**という。いま、横たわったはりの両端がそれぞれ上向きの反力 R_A [N]と R_B [N]で支えられており、上から集中荷重 P [N]がかけられているものとする。このような状態のはりを、**両端単純支持はり**という。

垂直方向の力のつり合いは、次式で表される。

$$P = R_A + R_B \quad \cdots(2.1.1)$$

点 A まわりの力のモーメントのつり合いは、次式で表される

$$aP = \ell R_B \quad \cdots(2.1.2)$$

上式より反力 R_A および R_B を得る。

$$\boxed{R_B = \frac{aP}{\ell}} \quad \cdots(2.1.3)$$

$$R_A = P - R_B = \left(1 - \frac{a}{\ell}\right)P = \left(\frac{\ell - a}{\ell}\right)P = \frac{b}{\ell}P \quad \cdots(2.1.4)$$

$$\boxed{R_A = \frac{bP}{\ell}} \quad \cdots(2.1.5)$$

①AC間($0 \leq x \leq a$)の場合 仮想的に切り出した断面 X-X の左側断面 X+ にかかるせん断力 F_X [N](せん断応力[N/m²]とは異なる)は、上向きの力を正、下向きの力を負として、作用・反作用の法則より次式で表される。

$$F_X = R_A \quad \cdots(2.1.6)$$

R_A の式を代入すると、次式となる。

$$\boxed{F_X = \frac{bP}{\ell}} \quad (0 \leq x \leq a) \quad \cdots(2.1.7)$$

曲げによって部材内部に作用するモーメント(回転力)を曲げモーメントといい、内力により生じる。はりの長さ x の部分は、時計まわりに R_{Ax} のモーメントを受けていることから、断面 X+ の部分では、回転しないように反時計まわりに R_{Ax} のモーメントを生じている。これがはりの断面 X+ にかかる曲げモーメントとなる。両方のモーメントは、互いに協力しあって、はりを下に凸とする方向に働きかけている。この方向に作用する曲げモーメントを正と定義する。一方、はりを上に凸とする方向に作用する曲げモーメントを負と定義する。

断面 X+ にかかる曲げモーメント M_X [N·m] は、次式で表される。

$$M_X = R_A x \quad \cdots(2.1.8)$$

R_A の式を代入すると、次式となる。

$$\boxed{M_X = \frac{bP}{\ell} x} \quad (0 \leq x \leq a) \quad \cdots(2.1.9)$$

②CB間($a \leq x \leq \ell$)の場合 仮想的に切り出した断面 Y-Y の左側断面 Y+ にかかるせん断力 F_Y [N] は、上向きの力を正、下向きの力を負として、作用・反作用の法則より次式で表される。

$$F_Y = R_A - P \quad \cdots(2.1.10)$$

R_A の式を代入すると、次式となる。

$$F_Y = \frac{bP}{\ell} - P = \left(\frac{b - \ell}{\ell}\right)P = -\frac{aP}{\ell} \quad \cdots(2.1.11)$$

$$\boxed{F_Y = -\frac{aP}{\ell}} \quad (a \leq x \leq \ell) \quad \cdots(2.1.12)$$

負号は、せん断力 F_Y の向きが下向きであることを表している。

はりの長さ x の部分は、時計まわりに R_{Ax} のモーメントを受けている。これに対して、断面 Y+ では、はりが回転しないように反時計まわりに R_{Ax} のモーメントを生じている。両方のモーメントは、互いに協力しあって、はりを下に凸とする方向に働きかけている。したがって、長さ x の部分に対応する曲げモーメントは、正である(+ R_{Ax})。一方、長さ $(x - a)$ の部分は、反時計回りに $P(x - a)$ のモーメントを受けてい

る。これに対して、断面 Y+では、はりが回転しないように時計まわりに $P(x-a)$ のモーメントを生じている。両方のモーメントは、互いに協力しあって、はりを上に凸とする方向に働きかけている。したがって、長さ $(x-a)$ の部分に対応する曲げモーメントは、負である $(-P(x-a))$ 。以上より、断面 Y+の部材部分にかかる曲げモーメント M_Y [N・m]は、両者の和で表される。

$$M_Y = (+R_A x) + \{-P(x-a)\} = R_A x - P(x-a) \quad \cdots(2.1.13)$$

R_A の式を代入すると、次式となる。

$$M_Y = \frac{bP}{\ell} x - P(x-a) = \frac{bP}{\ell} x - Px + aP = \left(\frac{b-\ell}{\ell}\right) Px + aP = -\frac{aP}{\ell} x + aP = aP \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad \cdots(2.1.14)$$

$$M_Y = aP \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad (a \leq x \leq \ell) \quad \cdots(2.1.15)$$

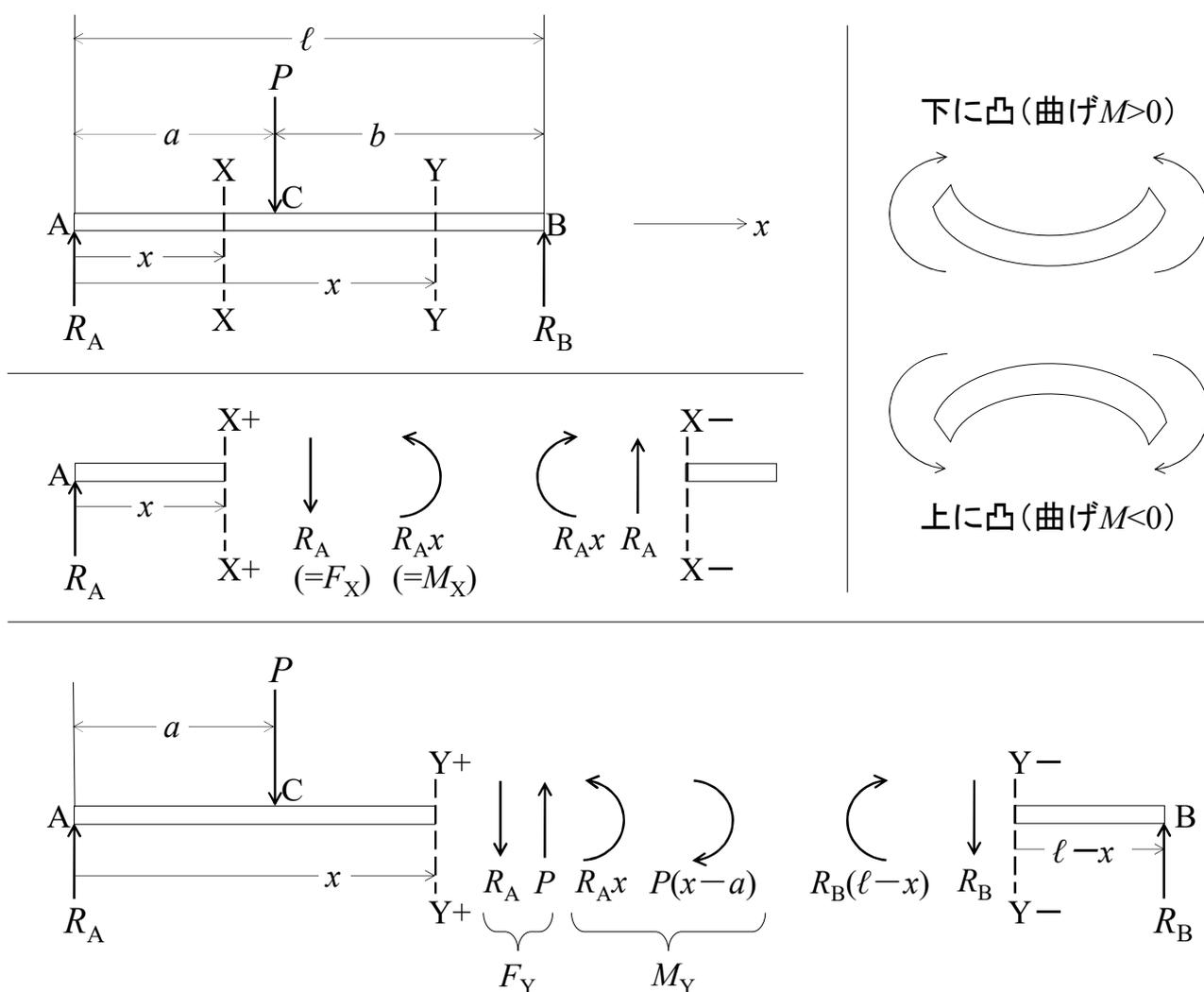


図 2.1.1 両端単純支持はりの解析

[文献5]有光 隆; これならわかる図解でやさしい入門材料力学(第2版), 技術評論社(2020), 3.3章 (p.88)を参考に作成した。

2.2 曲げ応力

はりを下に凸の向きに曲げると、曲げの内側はもとの長さよりも短くなり、外側は長くなる。その中間には、もとの長さ変わらない**中立面**が存在する。中立面に対して垂直に切り出した仮想断面を見ると、中立面の箇所は一本の線になって見える。この線を**中立軸**という。中立軸を境に、上向きに圧縮応力(→←)が、下向きに引張応力(←→)がそれぞれ作用する。このことは、曲げの内側と外側の変形を考えることで理解できる。曲げに伴い生じる垂直応力を**曲げ応力**という。

線分 P_0Q_0 が弧長 PQ に変形したときのひずみ ε は、次式で表される。

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{PQ - P_0Q_0}{P_0Q_0} = \frac{PQ - N_0M_0}{N_0M_0} = \frac{PQ - NM}{NM} \quad \cdots(2.2.1)$$

弧長 PQ と NM は、それぞれ次式で表される。

$$PQ = 2\pi(\rho + y) \times \frac{\theta}{2\pi} = (\rho + y)\theta \quad \cdots(2.2.2)$$

$$NM = 2\pi\rho \times \frac{\theta}{2\pi} = \rho\theta \quad \cdots(2.2.3)$$

ただし、 y は中立面からの距離[m]、 θ は中心角[rad]、 ρ は中立面までの曲率半径[m]。

ε の式に代入すると、次式のようにになる。

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = \frac{y}{\rho} \quad \cdots(2.2.4)$$

位置 y における曲げ応力 σ [N/m²] は、フックの法則を用いて次式で表される。

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho} \quad \cdots(2.2.5)$$

$$\boxed{\sigma = \frac{Ey}{\rho}} \quad \cdots(2.2.6)$$

ただし、 E は縦弾性係数またはヤング率[N/m²]。

いま、仮想断面上の中立軸から位置 y だけ離れたところに微小断面積 dA をとる。仮想断面全体の合力は、圧縮分と引張分の和で 0 となることから、次式が成り立つ。

$$\int \sigma dA = 0 \quad \cdots(2.2.7)$$

σ の式を代入すると、次式のようにになる。

$$\int \frac{Ey}{\rho} dA = 0 \quad \cdots(2.2.8)$$

$$\boxed{\int y dA = 0} \quad \cdots(2.2.9)$$

左辺のように、座標値と段面積の積でモーメント(回転力)を表したものを**断面一次モーメント**という。断面一次モーメントが 0 となる座標を**図心**という。上式は、中立軸が断面の図心を通ることを表している。

微小断面積 dA に作用する曲げ応力 σdA に距離 y を乗じて断面全体にわたって積分したものは、曲げモーメント M に等しい。

$$M = \int y\sigma dA \quad \cdots(2.2.10)$$

σ の式を代入すると、次式ようになる。

$$M = \int y \frac{Ey}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z \quad \cdots(2.2.11)$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}} \quad \left[I_z \equiv \int y^2 dA \right] \quad \cdots(2.2.12)$$

ただし、 I_z は断面二次モーメントであり、部材の断面形状に依存する。 EI_z を曲げ剛性という。

曲げ応力 σ の式に上式を代入して ρ を消去すると、曲げモーメントを含む曲げ応力の式を得る。

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho} = Ey \frac{M}{EI_z} = \frac{M}{I_z} y \quad \cdots(2.2.13)$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{I_z} y} \quad \cdots(2.2.14)$$

引張応力 σ は、中立軸から断面最下部までの距離 $y=e_1$ において最大値 σ_{\max} をとる。また、中立軸から断面最上部までの距離 $y=-e_2$ において最小値 σ_{\min} をとる。

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} e_1 = \frac{M}{Z_1} \quad \left[Z_1 \equiv \frac{I_z}{e_1} \right] \quad \cdots(2.2.15)$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{M}{I_z} e_2 = -\frac{M}{Z_2} \quad \left[Z_2 \equiv \frac{I_z}{e_2} \right] \quad \cdots(2.2.16)$$

Z_1 と Z_2 を断面係数という。

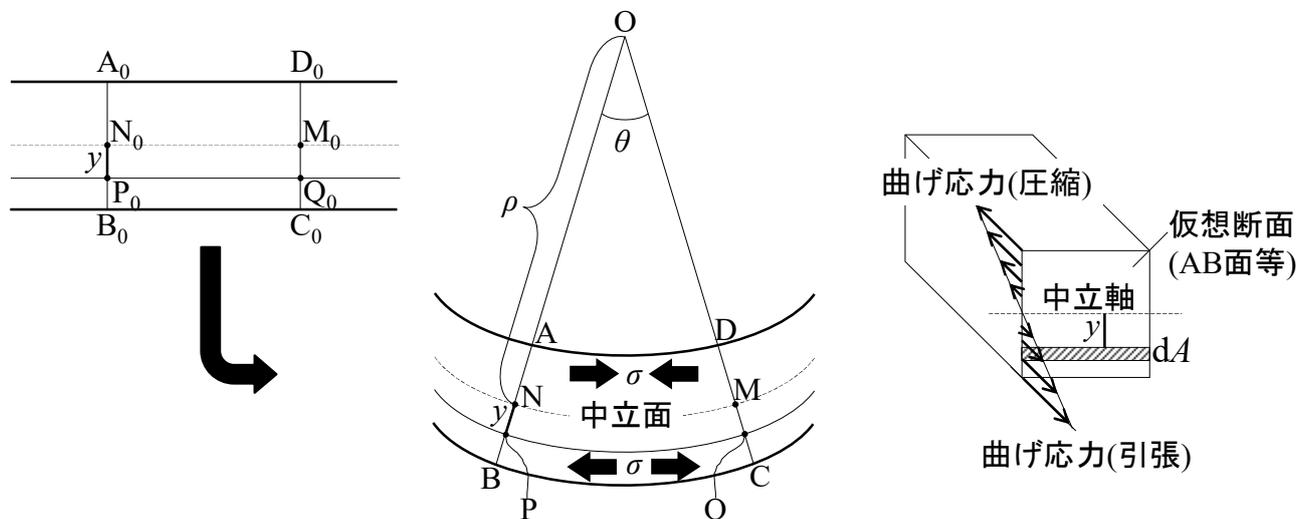


図 2.2.1 曲げ応力の説明図

[文献5]有光 隆; これならわかる図解でやさしい入門材料力学(第2版), 技術評論社(2020), 4.1章 (p. 107, 109) を参考に作成した。

3. はりのたわみ

3. 1 たわみの基礎式

はりが曲げられるときの軸線、すなわち中立面を横から見た曲線をたわみ曲線という。以下、たわみ y およびたわみ角 α を求めるための基礎式を導く。点 C を中心とする曲率円の半径 ρ [m] の逆数は、曲率円上の二つの接点 A および B を結ぶ中心角 $\Delta\theta$ [rad] をなす扇形 CAB の弧長 Δl [m] を用いて表される。

$$\Delta l = 2\pi\rho \times \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \rho\Delta\theta \quad \cdots(3.1.1)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta\theta}{\Delta l} \quad \cdots(3.1.2)$$

微小弧長 Δl は、線分 AB を斜辺とする直角三角形の斜辺と見なすことができる。接点 A と B の直角座標をそれぞれ $A(x, y)$ 、 $B(x+\Delta x, y+\Delta y)$ とすると、三平方の定理より次式が成り立つ。

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \quad \cdots(3.1.3)$$

曲率円上の点 A および点 B を通る接線と x 軸の間の角をそれぞれ α (たわみ角) および β とするとき、中心角 $\Delta\theta$ はこれらの差に等しい。

$$\Delta\theta = \alpha - \beta \quad (\alpha > \beta) \quad \cdots(3.1.4)$$

上式の正接(tan)を取ると、加法定理を用いて次式のように導かれる。

$$\tan(\Delta\theta) = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \quad \cdots(3.1.5)$$

$$\tan(\Delta\theta) = \frac{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta} \quad \cdots(3.1.6)$$

$$\tan(\Delta\theta) = \left[\frac{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} \right] \bigg/ \left[\frac{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} \right] \quad \cdots(3.1.7)$$

$$\tan(\Delta\theta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} \quad \cdots(3.1.8)$$

$\tan(\Delta\theta)$ のテーラー展開は、次式で表される。

$$\tan(\Delta\theta) = \Delta\theta + \frac{1}{3}(\Delta\theta)^3 + \frac{2}{15}(\Delta\theta)^5 + \cdots \quad \cdots(3.1.9)$$

中心角 $\Delta\theta$ が十分に小さいとき、上式より次式が成り立つ。

$$\tan(\Delta\theta) \approx \Delta\theta \quad \cdots(3.1.10)$$

$\tan(\Delta\theta)$ の式は、次式となる。

$$\Delta\theta = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} \quad \cdots(3.1.11)$$

正接項は、はりのたわみ曲線 $y=f(x)$ を通る点 A および B の接線の傾きを表すことから、次式で表される。

$$\tan\alpha = f'(x) \quad \cdots(3.1.12)$$

$$\tan\beta = f'(x+\Delta x) \quad \cdots(3.1.13)$$

$\Delta\theta$ の式に代入すると、次式のようになる。

$$\Delta\theta = \frac{f'(x) - f'(x+\Delta x)}{1 + f'(x)f'(x+\Delta x)} = -\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{1 + f'(x+\Delta x)f'(x)} \quad \cdots(3.1.14)$$

Δl の式と上式を $1/\rho$ の式に代入すると、次式のようになる。

$$\frac{1}{\rho} = - \left[\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{1 + f'(x+\Delta x)f'(x)} \right] / \left[\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} \right] \quad \cdots(3.1.15)$$

$$\frac{1}{\rho} = - \left[\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \right] / \left[\{1 + f'(x+\Delta x)f'(x)\} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} \right] \quad \cdots(3.1.16)$$

Δx を限りなく 0 に近づけると、導関数の定義式を用いて次式のようになる。

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{df'(x)}{dx} / \left[[1 + \{f'(x)\}^2] \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right] \quad \cdots(3.1.17)$$

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d^2y}{dx^2} / \left[\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right] \quad \left(f' \equiv \frac{dy}{dx} \right) \quad \cdots(3.1.18)$$

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d^2y}{dx^2} / \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \quad \cdots(3.1.19)$$

たわみが十分に小さい場合は、 $dy/dx \ll 1$ が成り立つことから、上式は近似的に次式となる。

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d^2y}{dx^2} \quad \cdots(3.1.20)$$

曲げモーメント M を含む $1/\rho$ の式を上式に代入すると、**たわみの基礎式**を得る。

$$\boxed{- \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI_z}} \quad \cdots(3.1.21)$$

上式を 2 回積分すると、たわみ y を得る。

$$\frac{dy}{dx} = \int - \frac{M}{EI_z} dx + C_1 \quad \cdots(3.1.22)$$

$$\boxed{y = \int \left(\int - \frac{M}{EI_z} dx \right) dx + C_1 + C_2} \quad \cdots(3.1.23)$$

ただし、 C_1 と C_2 は積分定数。

たわみ角 α は、次式で表される。

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \quad \cdots(3.1.24)$$

α が十分に小さい場合は、上で述べた手順にしたがって近似的に次式が成り立つ。

$$\alpha = \frac{dy}{dx} \quad [\tan \alpha \approx \alpha] \quad \cdots(3.1.25)$$

dy/dx の式を代入すると、たわみ角 α を得る。

$$\boxed{\alpha = \int - \frac{M}{EI_z} dx + C_1} \quad \cdots(3.1.26)$$

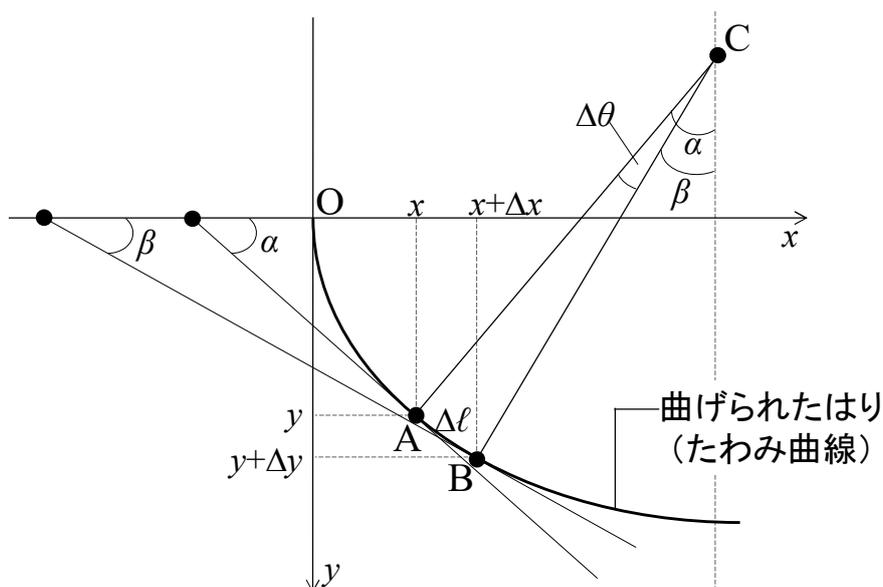


図 3.1.1 はりのたわみ

3. 2 片持はり

自由端に集中荷重 W [N]を受ける長さ l [m]の片持(かたもち)はりのたわみとたわみ角を求める。はりの長さ x の部分は、反時計まわりに Wx のモーメントを受けている。これに対して、仮想断面の左側 $X+$ では、はりが回転しないように時計まわりに Wx のモーメントを生じている。両方のモーメントは、互いに協力しあって、はりを上に凸とする方向に働きかけている。したがって、長さ x の部分に対応する曲げモーメント M_x [N・m]は、負である($-Wx$)。

$$M_x = -Wx \quad \cdots(3.2.1)$$

たわみの基礎式に代入すると、次式となる。

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI_z} = -\frac{W}{EI_z}x \quad \cdots(3.2.2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W}{EI_z}x \quad \cdots(3.2.3)$$

積分すると、次式となる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{2EI_z}x^2 + C_1 \quad \cdots(3.2.4)$$

はりの固定端($x=l$)では、たわみは起こらないことから($dy/dx=0, y=0$)、積分定数 C_1 を得る。

$$0 = \frac{W}{2EI_z}l^2 + C_1 \quad \left[x = l, \frac{dy}{dx} = 0 \right] \quad \cdots(3.2.5)$$

$$C_1 = -\frac{W}{2EI_z}l^2 \quad \cdots(3.2.6)$$

dy/dx の式に代入すると、たわみ角 α を与える式を得る。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{2EI_z} x^2 - \frac{W}{2EI_z} \ell^2 = \frac{W}{2EI_z} (x^2 - \ell^2) [= \tan \alpha \approx \alpha] \quad \cdots(3.2.7)$$

$$\alpha = \frac{W}{2EI_z} (x^2 - \ell^2) \quad \cdots(3.2.8)$$

たわみ角 α は、自由端の位置($x=0$)で最大値 α_{\max} をとる。

$$\alpha_{\max} = -\frac{W\ell^2}{2EI_z} \quad \cdots(3.2.9)$$

dy/dx の式をもう一度積分すると、次式のようになる。

$$y = \frac{W}{2EI_z} \left(\frac{x^3}{3} - \ell^2 x \right) + C_2 \quad \cdots(3.2.10)$$

はりの固定端($x=\ell$)では、たわみは起こらないことから($dy/dx=0, y=0$)、積分定数 C_2 を得る。

$$0 = \frac{W}{2EI_z} \left(\frac{\ell^3}{3} - \ell^3 \right) + C_2 = \frac{W}{2EI_z} \left(-\frac{2\ell^3}{3} \right) + C_2 = -\frac{W\ell^3}{3EI_z} + C_2 \quad [x=\ell, y=0] \quad \cdots(3.2.11)$$

$$C_2 = \frac{W\ell^3}{3EI_z} \quad \cdots(3.2.12)$$

y の式に代入すると、片持はりのたわみを表す式を得る。

$$y = \frac{W}{2EI_z} \left(\frac{x^3}{3} - \ell^2 x \right) + \frac{W\ell^3}{3EI_z} \quad \cdots(3.2.13)$$

$$y = \frac{W}{6EI_z} (x^3 - 3\ell^2 x + 2\ell^3) \quad \cdots(3.2.14)$$

たわみ y は、自由端の位置($x=0$)で最大値 y_{\max} をとる。

$$y_{\max} = \frac{W\ell^3}{3EI_z} \quad \cdots(3.2.15)$$

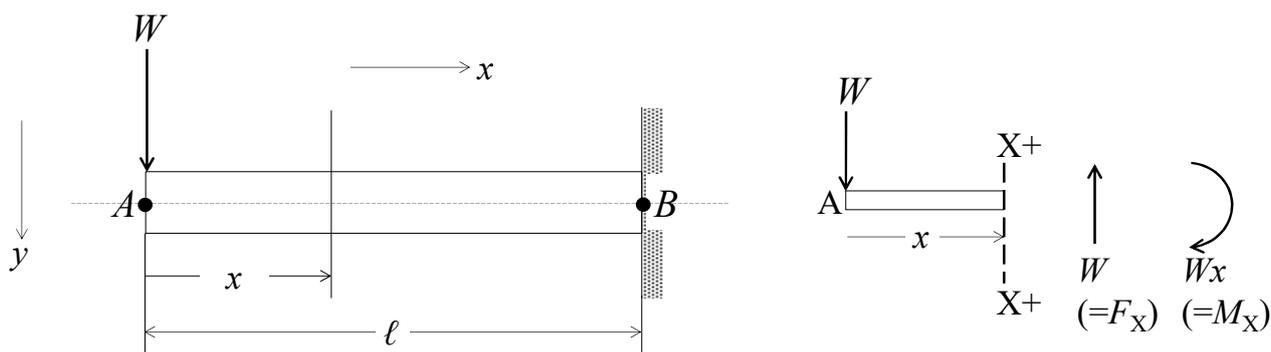


図 3.2.1 片持はりの解析

4. 軸のねじり

4. 1 トルク

一端が水平に固定された半径 r の**中実丸棒**(ちゅうじつまるぼう、中身の詰まった丸棒)があり、何らかの方法で外力を加えてねじることを考える。たとえば、丸棒の右端または左端にひもをつけて外力 F で下に引く場合が考えられる。この場合、丸棒は回転力 $T=r \times F$ でねじられることになる。この回転力を**トルク**あるいは**ねじりモーメント**といい、力と距離の積[N・m]で表される。トルクやモーメントという言葉は、回転力という言葉に置き換えると理解しやすい。

軸動力 P [W]は、軸仕事 W [J]と時間 t [s]の比で定義される。

$$P = \frac{W}{t} \quad \cdots(4.1.1)$$

軸仕事 W は、液に及ぼす外力 F [N]と軸が1回転する際に描く周長 $2\pi r_s$ [m]の積で表される。

$$P = \frac{F \times 2\pi r_s}{1/n} \quad [W = F \times 2\pi r_s] \quad \cdots(4.1.2)$$

$$P = 2\pi n(r_s \times F) \quad \cdots(4.1.3)$$

トルク T [N・m]は、力と距離の積で表される。

$$P = 2\pi nT \quad [T \equiv r_s \times F] \quad \cdots(4.1.4)$$

$$P = \omega T \quad \left[\omega \equiv \frac{2\pi}{1/n} = 2\pi n \right] \quad \cdots(4.1.5)$$

$$\boxed{T = \frac{P}{\omega}} \quad \cdots(4.1.6)$$

ただし、 n は軸の回転速度[1/s]、 r_s は軸半径[m]、 ω は角速度[rad/s]。

角速度は、単位時間あたりの角度変化を表す($\omega = \Delta\theta / \Delta t$)。たとえば、観覧車が一周するまでの所要時間を測定して、それを $360^\circ = 2\pi$ [rad]から割り算すると、その観覧車の角速度が分かる。

4. 2 ねじり応力

長さ l [m]、半径 r [m]の丸棒をねじり角 Θ [rad]だけねじる(シータ Θ は、 θ の大文字)。このとき、丸棒の微小側面 $abcd$ は、平行四辺形 $ab'c'd$ のように変形する(ひずみが生じる)。丸棒全体で考えれば、側面を線分 AB で切ってはがして広げると、ねじる前は長方形 $ABCD$ であったものが、ねじると平行四辺形 $AB'C'D$ のように変形することになる。この場合の部材に生じる応力の種類はせん断応力であり、とくに**ねじり応力**とよばれる。ねじり応力が作用することにより部材に生じるせん断ひずみ γ [-]は、次式で表される。

$$\gamma = \frac{\Delta l}{l} \quad \cdots(4.2.1)$$

部材の変形量 Δl は、扇形の弧長部分に相当する。

$$\Delta l = 2\pi r \times \frac{\Theta}{2\pi} = r\Theta \quad \cdots(4.2.2)$$

γ の式に代入する。

$$\gamma = \frac{r\Theta}{l} \quad \cdots(4.2.3)$$

$$\gamma = r\theta \quad \left[\theta \equiv \frac{\Theta}{\ell} \right] \quad \cdots(4.2.4)$$

ただし、 θ は比ねじり角[rad/m]。

ねじり応力 τ [N・m]は、次式のように導かれる。

$$\tau = G\gamma \quad \cdots(4.2.5)$$

$$\boxed{\tau = Gr\theta} \quad [\gamma = r\theta] \quad \cdots(4.2.6)$$

せん断角 ϕ [rad]について、近似的に次式が成り立つ。

$$\tan\phi \approx \frac{r\theta}{\ell} \quad \cdots(4.2.7)$$

$$\tan\phi \approx r\theta \quad \left[\theta \equiv \frac{\Theta}{\ell} \right] \quad \cdots(4.2.8)$$

角 ϕ が非常に小さい場合は、次式が成り立つ。

$$\tan\phi \approx \phi \quad \cdots(4.2.9)$$

2式を等置する。

$$r\theta = \phi \quad \cdots(4.2.10)$$

$$\boxed{\gamma = \phi} \quad [\gamma = r\theta] \quad \cdots(4.2.11)$$

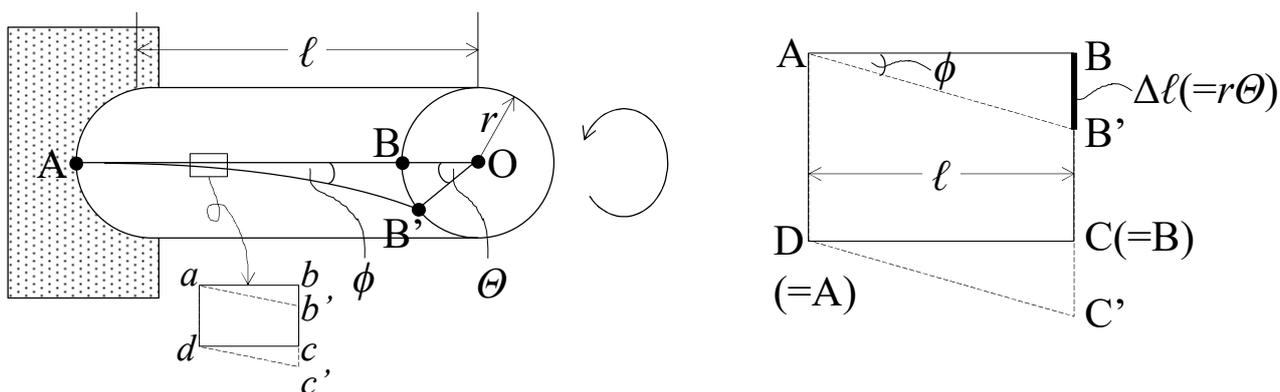


図 4.2.1 軸のねじりの説明図

4. 3 断面二次極モーメント

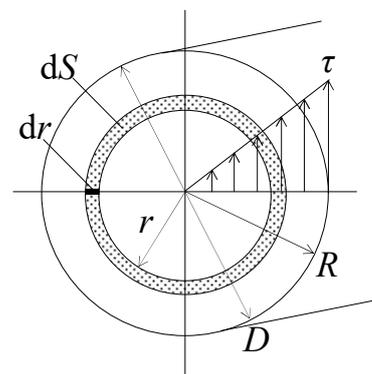
丸棒(半径 R [m], 直径 D [m])の微小断面積 dS [m²]に作用する微小トルク dT は、ねじりに伴う内力 τdS [N]と中心からの距離 r の積で表される。

$$dT = r \times \tau dS \quad \cdots(4.3.1)$$

$$dT = Gr^2\theta dS \quad [\tau = Gr\theta] \quad \cdots(4.3.2)$$

$$T = G\theta \int r^2 dS \quad \cdots(4.3.3)$$

$$\boxed{T = G\theta I_p} \quad \left[I_p \equiv \int r^2 dS \right] \quad \cdots(4.3.4)$$



ただし、 I_P は断面二次極モーメントであり、部材の断面形状に依存する。

部材表面($r=R$)に生じる最大ねじり応力 τ_{\max} [N/m^2]は、次式で表される。

$$\tau_{\max} = GR\theta$$

上2式の比を取る。

$$\frac{\tau_{\max}}{T} = \frac{GR\theta}{G\theta I_P} = \frac{R}{I_P} \quad \cdots(4.3.5)$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_P/R} = \frac{T}{Z_P} \quad \cdots(4.3.6)$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{T}{Z_P}} \quad \left[Z_P \equiv \frac{I_P}{R} \right] \quad \cdots(4.3.7)$$

ただし、 Z_P は極断面係数であり、部材の断面形状に依存する。

中実丸棒の微小断面積 dS の帯を広げると、周長 $2\pi r$ と微小幅 dr からなる細い長方形となる。

$$dS = 2\pi r dr \quad \cdots(4.3.8)$$

dT の式に代入して積分すると、中実丸棒の断面二次極モーメント I_P と極断面係数 Z_P を得る。

$$dT = Gr^2\theta(2\pi r dr) = 2\pi G\theta r^3 dr \quad \cdots(4.3.9)$$

$$T = G\theta \left(2\pi \int_0^R r^3 dr \right) \quad \cdots(4.3.10)$$

$$I_P = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2} \quad [T = G\theta I_P] \quad \cdots(4.3.11)$$

$$\boxed{I_P = \frac{\pi D^4}{32}} \quad (\text{中実丸棒}) \quad \cdots(4.3.12)$$

$$Z_P = \frac{I_P}{R} = \frac{\pi D^4}{32} \bigg/ \frac{D}{2} \quad \cdots(4.3.13)$$

$$\boxed{Z_P = \frac{\pi D^3}{16}} \quad (\text{中実丸棒}) \quad \cdots(4.3.14)$$

円管のような、断面中央がくりぬかれた丸棒を中空丸棒という。中空丸棒の断面二次極モーメントは、中空部の半径(円管内径) R_1 、丸棒の半径(円管外径) R_2 として、次式のように導かれる。

$$T = G\theta \left(2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \right) \quad \cdots(4.3.15)$$

$$I_P = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi R_2^4}{2} - \frac{\pi R_1^4}{2} \quad [T = G\theta I_P] \quad \cdots(4.3.16)$$

$$\boxed{I_P = \frac{\pi(D_2^4 - D_1^4)}{32}} \quad (\text{中空丸棒}) \quad \cdots(4.3.17)$$

$$Z_P = \frac{I_P}{R} = \frac{\pi(D_2^4 - D_1^4)}{32} \bigg/ \frac{D_2}{2} \quad \cdots(4.3.18)$$

$$\boxed{Z_P = \frac{\pi(D_2^4 - D_1^4)}{16D_2}} \quad (\text{中空丸棒}) \quad \cdots(4.3.19)$$

4. 4 軸径

軸径 d_s は、部材表面に生じる最大ねじり応力 τ_{\max} が許容ねじり応力 τ_a 以下を満たすように決める。

$$\tau_{\max} \leq \tau_a \quad \left[\tau_{\max} = \frac{T}{Z_p} \right] \quad \cdots(4.4.1)$$

ただし、 T はトルク(回転力)[N・m]、 Z_p は断面係数。

中実軸の軸径 d_s は、次式のように導かれる。

$$\frac{T}{\pi d_s^3 / 16} \leq \tau_a \quad \left[Z_p = \frac{\pi d_s^3}{16} \right] \quad \cdots(4.4.2)$$

$$16T \leq \pi \tau_a d_s^3 \quad \cdots(4.4.3)$$

$$d_s \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi \tau_a}} \quad \cdots(4.4.4)$$

下限値を軸径の設計値とする。

$$d_s = \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi \tau_a}} \quad \cdots(4.4.5)$$

許容ねじり応力 τ_a は、許容引張応力 σ_a の 0.8 倍とする。[文献 10]

参考文献

- [1] 伊藤勝悦; やさしく学べる材料力学(第3版), 森北出版(2014)
- [2] 臺丸谷政志, 小林秀敏; 基礎から学ぶ材料力学(第2版), 森北出版(2015)
- [3] 宇津木諭; 絵ときでわかる材料力学, オーム社(2007)
- [4] 有光 隆; 図解でわかるはじめての材料力学, 技術評論社(1999)
- [5] 有光 隆; これならわかる図解でやさしい入門材料力学(第2版), 技術評論社(2020)
- [6] 石田良平, 秋田 剛; ビジュアルアプローチ材料力学, 森北出版(2011)
- [7] 荒井政大; 図解はじめての材料力学, 講談社(2012)
- [8] 高等学校工業科用教科書, 土木基礎力学1 構造力学の基礎, 実教出版(2009)
- [9] G. Towler, R. Sinnott; Chemical Engineering Design 2nd Ed., Butterworth-Heinemann (2012), Chapter 14 Design of pressure vessels
- [10] 日本規格協会; JIS ハンドブック 17 圧力容器・ボイラ, 日本規格協会(2016), B8265

問 題

水の物性値：密度 1000 kg/m^3 、粘度 $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 、平均比熱容量 $4200 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ 、熱伝導度 $0.58 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$
 重力加速度： 9.81 m/s^2

- (1) 直径 30 mm 、長さ 1000 mm の丸棒が引張荷重を受けて長さが 0.1 mm 伸び、直径が 0.009 mm 縮んだ。
 ①縦ひずみ[-]、②横ひずみ[-]、③ポアソン比[-]を求めよ。
- (2) 断面積 100 mm^2 の部材が 2 kN の引張荷重を受けて 0.0001 の縦ひずみを生じた。①部材の断面に生じる引張応力[MPa]、②縦弾性係数[GPa]を求めよ。
- (3) せん断面積 600 mm^2 の部材が 36 kN のせん断荷重を受けて 0.001 のせん断ひずみを生じた。①部材の断面に生じるせん断応力[MPa]、②横弾性係数[GPa]を求めよ。
- (4) 100 kN の引張荷重に耐える丸棒を設計したい。丸棒の基準応力 320 MPa 、安全率 4 のとき、丸棒の最小直径[mm]を求めよ。
- (5) 内径 1000 mm の円筒に 2 MPa のガスを封入する。円筒の許容引張応力が 100 MPa のとき、円筒に必要な板厚[mm]を求めよ。
- (6) 中実軸が $200 \text{ N}\cdot\text{m}$ のトルクを受けながら 120 rpm で回転している。軸動力[kW]を求めよ。
- (7) 中実軸が 150 rpm で 2 kW の動力を伝達している。許容ねじり応力が 20 MPa のとき、①トルク[N·m]、②軸径[mm]を求めよ。

答(1)①0.0001,②-0.0003,③0.33,(2)①20 MPa,②200 GPa,(3)①60 MPa,②60GPa,(4)39.9 mm,(5)10 mm,(6)2.51 kW,(7)①127 N·m,②31.9 mm

[参考]数値の丸め方

(ア)切り捨てと切り上げの値を比較してより近い値を採用する。

12.31 $\underline{3}$ → (切り捨て)12.31 / (切り上げ)12.32 → (採用)12.31

(イ)(ア)で差が等しい場合は、偶数値を採用する。

12.30 $\underline{5}$ → (切り捨て)12.30 / (切り上げ)12.31 → (採用)12.30

単位換算

1 in (インチ) = 2.54 cm

1 ft (フィート) = 12 in = 0.3048 m

1 lb (ポンド) = 0.4536 kg

1 gal (ガロン) = 0.004546 m³

1 lb/ft³ (ポンド毎立方フィート) = 16.02 kg/m³

1 cP (センチポアズ) = 0.0006720 lb/(ft·s) = 0.001 Pa·s

1 dyn/cm (ダイン毎センチ) = 1 mN/m ※表面張力の単位。dyn は、力の単位。