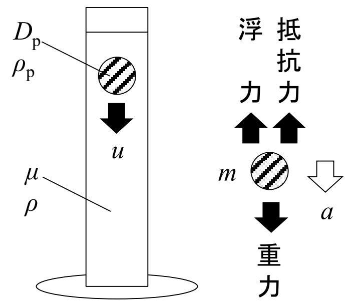
３．粉粒体の運動

３．１　自由沈降

3.1.1　運動方程式



粒子径 D_p [m]、密度 ρ_p [kg/m^3]の単一球粒子が粘度 μ [Pa･s]、密度 ρ [kg/m^3]の静止している液体中を沈降速度 u [m/s]で**自由沈降(free settling)**するとき、沈降粒子の運動方程式は次式で表される。

$$\frac{\pi}{6}D_p^{\ 3}\rho_p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{6}D_p^{\ 3}\rho_p g-\frac{\pi}{6}D_p^{\ 3}\rho g-C_D\frac{\pi D_p^{\ 2}}{4}\frac{\rho u^2}{2} \quad \cdots(3.1.1.1)$$

ただし、t は沈降時間[s]、C_D は抵抗係数[－]、g は重力加速度[m/s^2]。

上式の左辺は慣性力、右辺は左から順に重力、浮力、抵抗力である。慣性力は、粒子重量と加速度の積で表される($F=ma$)。**浮力**は、粒子が液体の中に入ることでかさが増す分の液重量が沈降粒子に対して垂直上向きに作用する。**抵抗力**は、投影面積(粒子の大きさに相当)と運動エネルギー(沈降速度に相当)に比例し、沈降粒子に対して垂直上向きに作用する。抵抗力がこれらの物理量に比例することは、自分が沈降粒子になったとして想像してみると、理解できるであろう。なお、運動エネルギー項の速度 u は相対速度であり、流体が動いている場合は、補正が必要となる。比例定数である**抵抗係数(drag coefficient)**C_D [－]を用いることで、比例式を等式で表すことができる。抵抗係数は、**粒子レイノルズ数** Re_p [－]の関数であり、次式のように場合分けされる。

(a)Stokes 域(Re_p<2)のとき　　$C_D=\dfrac{24}{Re_p}$　　$\cdots$(3.1.1.2)

(b)Allen 域(2<Re_p<500)のとき　　$C_D=\dfrac{10}{\sqrt{Re_p}}$　　$\cdots$(3.1.1.3)

(c)Newton 域(500<Re_p)のとき　　$C_D=0.44$　　$\cdots$(3.1.1.4)

粒子レイノルズ数 Re_p [－]は、粒子周りの流体の慣性力 ma と粒子周りの流体の粘性力 τA の比 $ma/\tau A$ で定義される。慣性力 $ma=\rho V(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t)\propto\rho D_p^3(u/(D_p/u))=\rho D_p^2u^2$、粘性力 $\tau A\propto\mu(u/D_p)D_p^2=\mu uD_p$ であることから、粒子レイノルズ数 Re_p [－]は、次式で表される。

$$Re_p=\frac{D_p u\rho}{\mu} \quad \cdots(3.1.1.5)$$

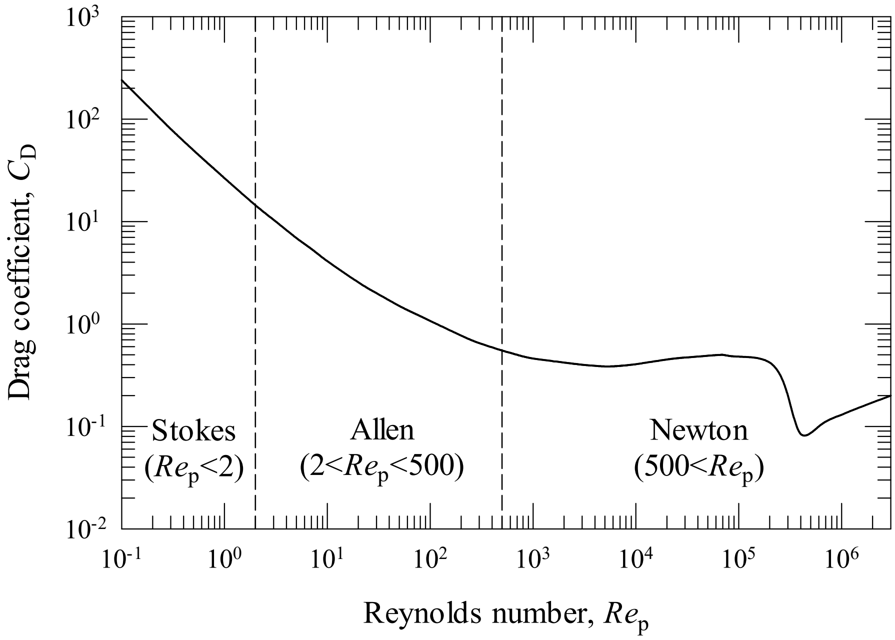


図 3. 1. 1. 1　抵抗係数と粒子レイノルズ数の関係（球粒子の場合）[文献 1]

---

①適当な沈降領域を仮定して終末速度を求める。(沈降粒子がナノ～ミクロン寸法であれば Stokes 域、ミリ寸法であれば Newton 域、それらの中間であれば Allen 域を仮定してみよ。)
②①の結果をもとに粒子レイノルズ数を計算する。
③②の結果が適切な範囲に入っていれば計算終了、そうでなければ別の沈降領域を仮定して再計算する。

---

3. 1. 2　終末速度

自由沈降する球粒子が等速度運動する場合、運動方程式の加速度を 0 とおき、沈降速度 u を終末速度 u_t に置き換える。さらに、抵抗係数 C_D の式を運動方程式に代入して式中の u_t について整理すると、それぞれの沈降領域における**終末速度(terminal velocity)**が導かれる。
沈降領域が Stokes 域の場合は、次式のように導かれる。

$$0 = \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho_p g - \frac{\pi}{6} D_p^3 \rho g - \frac{24}{Re_p} \frac{\pi D_p^2}{4} \frac{\rho u_t^2}{2} \quad \cdots(3.1.2.1)$$

$$0 = \frac{\pi g(\rho_p - \rho) D_p^3}{6} - \frac{24}{D_p u_t \rho / \mu} \frac{\pi D_p^2}{4} \frac{\rho u_t^2}{2} \quad \cdots(3.1.2.2)$$

$$0 = \frac{\pi g(\rho_p - \rho) D_p^3}{6} - 3\pi\mu D_p u_t \quad \cdots(3.1.2.3)$$

$$\boxed{u_t = \frac{g(\rho_p - \rho) D_p^2}{18\mu}} \quad \text{(Stokes)} \quad \cdots(3.1.2.4)$$

沈降領域が Allen 域の場合は、次式のように導かれる。

$$0=\frac{\pi}{6}D_\mathrm{p}{}^3\rho_\mathrm{p}g-\frac{\pi}{6}D_\mathrm{p}{}^3\rho g-\frac{10}{\sqrt{Re_\mathrm{p}}}\frac{\pi D_\mathrm{p}{}^2}{4}\frac{\rho u_\mathrm{t}{}^2}{2}\quad\cdots(3.1.2.5)$$

$$\frac{\pi g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}{}^3}{6}\sqrt{Re_\mathrm{p}}=10\frac{\pi D_\mathrm{p}{}^2}{4}\frac{\rho u_\mathrm{t}{}^2}{2}\quad\cdots(3.1.2.6)$$

$$\left[\frac{\pi g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}{}^3}{6}\sqrt{Re_\mathrm{p}}\right]^2=\left(10\frac{\pi D_\mathrm{p}{}^2}{4}\frac{\rho u_\mathrm{t}{}^2}{2}\right)^2\quad\cdots(3.1.2.7)$$

$$\frac{\pi^2g^2(\rho_\mathrm{p}-\rho)^2D_\mathrm{p}{}^6}{36}\left(\frac{D_\mathrm{p}u_\mathrm{t}\rho}{\mu}\right)=100\frac{\pi^2D_\mathrm{p}{}^4}{16}\frac{\rho^2u_\mathrm{t}{}^4}{4}\quad\cdots(3.1.2.8)$$

$$\frac{g^2(\rho_\mathrm{p}-\rho)^2D_\mathrm{p}{}^3}{3600\mu}=\frac{\rho u_\mathrm{t}{}^3}{64}\quad\cdots(3.1.2.9)$$

$$\frac{4}{225}\frac{g^2(\rho_\mathrm{p}-\rho)^2D_\mathrm{p}{}^3}{\rho\mu}=u_\mathrm{t}{}^3\quad\cdots(3.1.2.10)$$

$$\boxed{u_\mathrm{t}=\left[\frac{4}{225}\frac{g^2(\rho_\mathrm{p}-\rho)^2}{\rho\mu}\right]^{1/3}D_\mathrm{p}}\ \text{(Allen)}\quad\cdots(3.1.2.11)$$

沈降領域が Newton 域の場合は、次式のように導かれる。

$$0=\frac{\pi}{6}D_\mathrm{p}{}^3\rho_\mathrm{p}g-\frac{\pi}{6}D_\mathrm{p}{}^3\rho g-0.44\frac{\pi D_\mathrm{p}{}^2}{4}\frac{\rho u_\mathrm{t}{}^2}{2}\quad\cdots(3.1.2.12)$$

$$\frac{\pi g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}{}^3}{6}=\frac{0.44}{8}(\pi D_\mathrm{p}{}^2)(\rho u_\mathrm{t}{}^2)\quad\cdots(3.1.2.13)$$

$$\frac{g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}}{0.33}=\rho u_\mathrm{t}{}^2\quad\cdots(3.1.2.14)$$

$$u_\mathrm{t}{}^2=\frac{g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}}{(1/3)\rho}\quad\cdots(3.1.2.15)$$

$$\boxed{u_\mathrm{t}=\sqrt{\frac{3g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}}{\rho}}}\ \text{(Newton)}\quad\cdots(3.1.2.16)$$

【計算例】終末速度

(1) 密度 2650 kg/m³、粒子径 70.0 μm の球粒子が密度 1000 kg/m³、粘度 1.00 mPa･s の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。重力加速度 9.81 m/s² とする。 (4.41×10^{-3} m/s)

$u_\mathrm{t}=g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}{}^2/18\mu=(9.81)(2650-1000)(70.0\times10^{-6})^2/[(18)(1.00\times10^{-3})]=4.4063\times10^{-3}\ \mathrm{m/s}\fallingdotseq\boxed{4.41\times10^{-3}\ \mathrm{m/s}}$

(Stokes 域を仮定)

$Re_\mathrm{p}=D_\mathrm{p}u_\mathrm{t}\rho/\mu=(70.0\times10^{-6})(4.4063\times10^{-3})(1000)/(1.00\times10^{-3})=0.30844<2$ Stokes 域の仮定は、正しい。

(2) 密度 2650 kg/m^3、粒子径 210 μm の球粒子が密度 1.20 kg/m^3、粘度 18.2 μPa･s の静止した空気中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。重力加速度 9.81 m/s^2 とする。（1.72 m/s）

$u_t=g(\rho_p-\rho)D_p^2/18\mu=(9.81)(2650-1.20)(210\times10^{-6})^2/[(18)(18.2\times10^{-6})]=3.4979$ m/s(Stokes 域を仮定)

$Re_p=D_pu_t\rho/\mu=(210\times10^{-6})(3.4979)(1.20)/(18.2\times10^{-6})=48.432>2$　Stokes 域の仮定は、誤り。

$u_t=[(4/225)g^2(\rho_p-\rho)^2/(\rho\mu)]^{1/3}D_p=[(4/225)(9.81)^2(2650-1.20)^2/\{(1.20)(18.2\times10^{-6})\}]^{1/3}(210\times10^{-6})$

$=1.7201$ m/s≒$\boxed{1.72\ \text{m/s}}$(Allen 域を仮定)

$Re_p=D_pu_t\rho/\mu=(210\times10^{-6})(1.7201)(1.20)/(18.2\times10^{-6})=23.816<500$　Allen 域の仮定は、正しい。

【問題】終末速度

(1) 密度 2650 kg/m^3、粒子径 10.0 μm の球粒子が密度 1000 kg/m^3、粘度 1.00 mPa･s の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(8.99×10^{-5} m/s)

(2) 密度 2650 kg/m^3、粒子径 500 μm の球粒子が密度 1000 kg/m^3、粘度 1.00 mPa･s の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。重力加速度 9.81 m/s^2 とする。（0.0835 m/s）

3.1.3　自由沈降距離

沈降粒子が等加速度運動する場合を考える。ここでは、Stokes 域を仮定する。運動方程式を変数分離により u について解くと、ある時間 t [s]における沈降速度 u が導かれる。

$$\frac{\pi}{6}D_p^3\rho_p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{6}D_p^3\rho_p g-\frac{\pi}{6}D_p^3\rho g-\frac{24}{Re_p}\frac{\pi D_p^2}{4}\frac{\rho u^2}{2}\quad\cdots(3.1.3.1)$$

$$\frac{\pi}{6}D_p^3\rho_p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi g(\rho_p-\rho)D_p^3}{6}-\frac{24}{D_pu\rho/\mu}\frac{\pi D_p^2}{4}\frac{\rho u^2}{2}\quad\cdots(3.1.3.2)$$

$$\frac{\pi}{6}D_p^3\rho_p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi g(\rho_p-\rho)D_p^3}{6}-3\pi\mu D_p u\quad\cdots(3.1.3.3)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{6}{\pi D_p^3\rho_p}\left[\frac{\pi g(\rho_p-\rho)D_p^3}{6}-3\pi\mu D_p u\right]\quad\cdots(3.1.3.4)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{g(\rho_p-\rho)}{\rho_p}-\frac{18\mu u}{D_p^2\rho_p}\quad\cdots(3.1.3.5)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=A-Bu\quad\left[A\equiv\frac{g(\rho_p-\rho)}{\rho_p}\qquad B\equiv\frac{18\mu}{D_p^2\rho_p}\right]\quad\cdots(3.1.3.6)$$

$$\int_0^u\frac{\mathrm{d}u}{A-Bu}=\int_0^t\mathrm{d}t\quad\cdots(3.1.3.7)$$

$$-\frac{1}{B}\left[\ln(A-Bu)\right]_0^u=t\quad\cdots(3.1.3.8)$$

$$-\frac{1}{B}[\ln(A-Bu)-\ln A]=t \quad \cdots(3.1.3.9)$$

$$\ln\frac{A-Bu}{A}=-Bt \quad \cdots(3.1.3.10)$$

$$\frac{A-Bu}{A}=e^{-Bt} \quad \cdots(3.1.3.11)$$

$$u=\frac{A}{B}(1-e^{-Bt}) \cdots(3.1.3.12)$$

$$u=\frac{g(\rho_\mathrm{p}-\rho)/\rho_\mathrm{p}}{18\mu/(D_\mathrm{p}{}^2\rho_\mathrm{p})}\left[1-\exp\left(-\frac{18\mu}{D_\mathrm{p}{}^2\rho_\mathrm{p}}t\right)\right] \quad \cdots(3.1.3.13)$$

$$u=\frac{g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}{}^2}{18\mu}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\rho_\mathrm{p}D_\mathrm{p}{}^2/(18\mu)}\right)\right] \quad \cdots(3.1.3.14)$$

$$\boxed{u=\frac{g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}{}^2}{18\mu}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]} \quad \left[\tau\equiv\frac{\rho_\mathrm{p}D_\mathrm{p}{}^2}{18\mu}\right] \quad \cdots(3.1.3.15)$$

ただし、τ は緩和時間[s]。

上式の時間 t を無限大に漸近させると、沈降速度 u は stokes 式の終末速度 u_t に等しくなる。また、上式の沈降速度 u は、沈降距離 h の時間微分($\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$)で表される。上式を積分することで、ある時間 t における沈降距離 h [m]を得る。

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}{}^2}{18\mu}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad \cdots(3.1.3.16)$$

$$\boxed{h=\frac{g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}{}^2}{18\mu}t+\frac{g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}{}^2}{18\mu}\left[\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)-1\right]\tau} \quad \cdots(3.1.3.17)$$

【計算例】自由沈降距離

密度 2650 kg/m^3、粒子径 5.00 μm の球粒子を密度 1.20 kg/m^3、粘度 18.2 μPa･s の静止した空気中に自由沈降させる。①終末速度 u_t [m/s]、②終末速度の 99%に到達するまでの時間 t_{99} [s]、③沈降距離 h [m]を求めよ。重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(①1.98×10^{-3} m/s, ②9.31×10^{-4} s, ③1.45×10^{-6} m)

①$u_\mathrm{t}=g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}{}^2/18\mu=(9.81)(2650-1.20)(5.00\times10^{-6})^2/[(18)(18.2\times10^{-6})]=1.9829\times10^{-3}$ m/s≒$\boxed{1.98\times10^{-3}\ \mathrm{m/s}}$

$Re_\mathrm{p}=D_\mathrm{p}u_\mathrm{t}\rho/\mu=(5.00\times10^{-6})(1.9829\times10^{-3})(1.20)/(18.2\times10^{-6})=6.5370\times10^{-6}<2$　Stokes 域

②$\tau=\rho_\mathrm{p}D_\mathrm{p}{}^2/(18\mu)=(2650)(5.00\times10^{-6})^2/[(18)(18.2\times10^{-6})]=2.0222\times10^{-4}$ s

$t_{99}=-\tau\ln0.01=-(2.0222\times10^{-4})(\ln0.01)=9.3125\times10^{-4}$ s≒$\boxed{9.31\times10^{-4}\ \mathrm{s}}$

③$h=[g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}{}^2/(18\mu)]t_{99}+[g(\rho_\mathrm{p}-\rho)D_\mathrm{p}{}^2/(18\mu)][\exp(-t_{99}/\tau)-1]\tau=u_\mathrm{t}(t_{99}-0.99\tau)$

$=(1.9829\times10^{-3})[(9.3125\times10^{-4})-(0.99)(2.0222\times10^{-4})]=1.4496\times10^{-6}$ m≒$\boxed{1.45\times10^{-6}\ \mathrm{m}}$

【問題】自由沈降距離

密度 2650 kg/m^3､粒子径 5.00 μm の球粒子を密度 1000 kg/m^3､粘度 1.00 mPa･s の静水中に自由沈降させる。①終末速度 u_t [m/s]、②終末速度の 99%に到達するまでの時間 t_{99} [s]、③沈降距離 h [m]を求めよ。重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(①2.25×10^{-5} m/s, ②1.69×10^{-5} s, ③2.99×10^{-10} m)

3.1.4　終末速度の補正

①粒子形状の影響　粒子形状が球以外の場合は、等体積球に置換した粒子の終末速度 u_{ts} [m/s]と球形度 Ψ [－]を用いて次式で表される。

$u_t/u_{ts}=0.843\log_{10}(\Psi/0.065)$　…(3.1.4.1)

$u_{ts}=g(\rho_p-\rho)D_V^2/18\mu$　…(3.1.4.2)

$D_V=(6V_p/\pi)^{1/3}$　…(3.1.4.3)

ただし、D_V は等体積球相当径[m]。

【計算例】終末速度の補正(粒子形状の影響)

密度 2650 kg/m^3、一辺 70.0 μm の立方体粒子が密度 1000 kg/m^3、粘度 1.00 mPa･s の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。立方体の球形度 0.806、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(6.25×10^{-3} m/s)

$V_p=D_p^3$

$D_V=(6V_p/\pi)^{1/3}=[(6/\pi)D_p^3]^{1/3}=(6/\pi)^{1/3}D_p=(6/\pi)^{1/3}(70.0\times10^{-6})=86.849$ μm

$u_{ts}=g(\rho_p-\rho)D_V^2/18\mu=(9.81)(2650-1000)(86.849\times10^{-6})^2/[(18)(1.00\times10^{-3})]=6.7828\times10^{-3}$ m/s(Stokes 域を仮定)

$Re_p=D_V u_{ts}\rho/\mu=(86.849\times10^{-6})(6.7828\times10^{-3})(1000)/(1.00\times10^{-3})=0.58907<2$　Stokes 域の仮定は、正しい。

【問題】終末速度の補正(粒子形状の影響)

(1) 密度 2650 kg/m^3、直径 70.0 μm、高さ 70.0 μm の円柱粒子が密度 1000 kg/m^3、粘度 1.00 mPa･s の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。高さと直径の等しい円柱の球形度 0.874、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(5.49×10^{-3} m/s)

(2) 密度 2650 kg/m^3、一辺 20 μm の立方体粒子が密度 1000 kg/m^3、粘度 1.00 mPa･s の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。立方体の球形度 0.806、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(5.10×10^{-4} m/s)

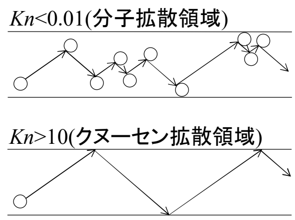
(3) 密度 2650 kg/m^3、直径 20 μm、高さ 20 μm の円柱粒子が密度 1000 kg/m^3、粘度 1.00 mPa･s の静水中を自由沈降するときの終末速度 u_t [m/s]を求めよ。高さと直径の等しい円柱の球形度 0.874、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(4.48×10^{-4} m/s)

②粒子径の影響　粒子径が 1 μm 程度以下になるとスリップ効果の影響が大きくなり流体抵抗 R_f [N]が減少することから次式で補正する。

$$R_f=\frac{3\pi\mu D_p u}{C_C}\quad\text{(Stokes)}\qquad\cdots(3.1.4.4)$$

$$C_C=1+Kn\left[2.46+0.82\exp\left(-\frac{0.44}{Kn}\right)\right]\qquad\cdots(3.1.4.5)$$

Cc はカニンガムの補正係数[－]であり、スリップ効果による流体抵抗の減少分を補正するための因子。上式は気体中を運動する粒子に対して成り立ち、液体の場合は C_C=1 である。[文献 2]
Kn は Knudsen(クヌーセン)数であり、拡散分子の平均自由行程 λ [m](固体壁に衝突した溶質が再び固体壁に衝突するまでに進む平均距離)と流れ場の代表長さ L [m](ここでは粒子径 D_p [m])の比で定義される。



$$Kn \equiv \frac{\lambda}{L} \quad \cdots(3.1.4.6)$$

平均自由行程の簡便な推算式として、次式がある。[文献 3, 4]

$$\lambda = \frac{3.2\mu}{P}\sqrt{\frac{RT}{2\pi M_A}} \quad \cdots(3.1.4.7)$$

ただし、M_A は気体分子のモル質量[kg/mol]、P は全圧[Pa]、R は気体定数 8.314 J/(mol･K)、μ は粘度[Pa･s]。（1 気圧 20℃の空気の場合で λ≒0.07 μm≒0.1 μm）
補正後の終末速度 u_t は、次式のように導かれる。

$$\frac{\pi}{6}D_p{}^3\rho_p\frac{du}{dt} = \frac{\pi}{6}D_p{}^3\rho_p g - \frac{\pi}{6}D_p{}^3\rho g - \frac{C_D(\pi D_p{}^2/4)(\rho u^2/2)}{C_C} \quad \cdots(3.1.4.8)$$

$$0 = \frac{\pi}{6}D_p{}^3(\rho_p - \rho)g - \frac{24}{D_p u_t\rho/\mu}\frac{(\pi D_p{}^2/4)(\rho u_t{}^2/2)}{C_C} \quad \cdots(3.1.4.9)$$

$$0 = \frac{\pi g(\rho_p - \rho)D_p{}^3}{6} - \frac{3\pi\mu D_p u_t}{C_C} \quad \cdots(3.1.4.10)$$

$$\boxed{u_t = \frac{g(\rho_p - \rho)D_p{}^2}{18\mu}C_C} \ \text{(Stokes)} \quad \cdots(3.1.4.11)$$

【計算例】終末速度の補正(粒子径の影響)

100 kPa, 20℃の空気中を粒子密度 2650 kg/m^3、粒子径 0.500 μm の球粒子が自由沈降するときの①カニンガム補正係数 C_C [－]と②終末速度 u_t [m/s]を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m^3､粘度 18.2 μPa･s､分子量 28.8､重力加速度 9.81 m/s^2 とする。 (①1.34, ②2.65×10^{-5} m/s)

λ=3.2(μ/P)(RT/2πM_A)$^{0.5}$=(3.2)(18.2×10^{-6}/100×10^3)[(8.314)(293.15)/{(2π)(28.8/1000)}]$^{0.5}$=6.7590×10^{-8} m

Kn=λ/L=λ/D_p=(6.7590×10^{-8})/(0.500×10^{-6})=0.13518

C_C=1+Kn[2.46+0.82exp(－0.44/Kn)]=1+(0.13518)[2.46+0.82exp[－(0.44/0.13518)]=1.3368≒1.34

u_t=[g(ρ_p－ρ)$D_p{}^2$/18μ]C_C=[(9.81)(2650－1.20)(0.500×10^{-6})^2/{(18)(18.2×10^{-6})}](1.3368)=2.6508×10^{-5} m/s
≒$\boxed{2.65\times10^{-5}\ \text{m/s}}$

【問題】終末速度の補正(粒子径の影響)

100 kPa, 20℃の空気中を粒子密度 2650 kg/m^3、粒子径 0.100 μm の球粒子が自由沈降するときの①カニンガム補正係数 C_C [－]と②終末速度 u_t [m/s]を求めよ。空気の密度 1.20 kg/m^3､粘度 18.2 μPa･s､分子量 28.8､重力加速度 9.81 m/s^2 とする。 (①2.95, ②2.34×10^{-6} m/s)

③容器壁の影響　懸濁液の入った容器を傾けると、粒子沈降により壁面近傍の粒子濃度が減少して液密度が小さくなる一方、液本体側の粒子密度が増加して液密度が大きくなる。その結果、器壁近傍と液本

体の間で密度分布が生成されて循環流が生じる。このため、垂直容器の場合よりも粒子の沈降が早く完了する（**ボイコット効果**）。

３．２　干渉沈降

濃厚粒子群の沈降挙動は、周囲の粒子の影響を受ける。これを**干渉沈降(hindered settling)**という。自由沈降時の終末速度式を補正することで、干渉沈降時の終末速度式を導くことができる。ここでは、Stokes域を仮定する。

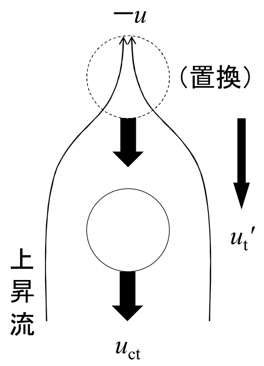
①沈降速度の補正　大量の粉体粒子が沈降することで液相中に大量の空隙が生じる為、空隙を埋める置換流の影響が無視できなくなる。このとき、観測される沈降速度は、相対的なものとなる。上昇置換流速の大きさを u [m/s]とするとき、粒子の相対沈降速度 u_t' [m/s]は、干渉沈降時の終末速度 u_{ct} [m/s]と上昇置換流速 u を用いて次式で表される。

$$u_t' = u_{ct} - (-u) = u_{ct} + u \quad \cdots(3.2.1)$$

ここで、断面積 A_{sl} [m^2]の円筒容器内を沈降する粒子群の全体積と、それによって置換される流体の体積は等しいことから、次式が成り立つ。

$$A_{sl}(1-\varepsilon)u_{ct} = A_{sl}\varepsilon u \quad \cdots(3.2.2)$$

$$u = \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)u_{ct} \quad \cdots(3.2.3)$$



ただし、ε は空隙率[－]。

u_t'の式に代入する。

$$u_t' = u_{ct} + \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)u_{ct} \quad \cdots(3.2.4)$$

$$\boxed{u_t' = \frac{u_{ct}}{\varepsilon}} \quad \cdots(3.2.5)$$

空隙率 ε は、懸濁液体積 V_{sl} [m^3]に対する空隙体積の比(V_{sl}－V_s) [m^3]で定義される。

$$\varepsilon \equiv \frac{V_{sl} - V_p}{V_{sl}} \quad \cdots(3.2.6)$$

$$\varepsilon = \frac{A_{sl}L - (W_p/\rho_p)}{A_{sl}L} \quad \cdots(3.2.7)$$

$$\boxed{\varepsilon = 1 - \frac{W_p}{\rho_p A_{sl} L}} \quad \cdots(3.2.8)$$

ただし、A_{sl} は懸濁層の断面積[m^2]、L は懸濁層高[m]、V_p は粒子体積[m^3]、W_p は粒子重量[kg]。

②流体物性の補正　懸濁液の粘度 μ_{sl} [Pa･s]は、懸濁粒子濃度に依存する。粒子濃度の代わりに空隙率 ε [－]の関数 $f(\varepsilon)$を用いて、次式で表される。

$$\mu_{sl} = \mu f(\varepsilon) \quad \cdots(3.2.9)$$

懸濁液の密度 ρ_{sl} [kg/m^3]は、純粋な液体の密度 ρ よりも粒子群の重量分だけ大きくなることを考慮して、粒子群と置換流体の密度の和で表す。

$$\rho_{sl} = \rho_p(1-\varepsilon) + \rho_f\varepsilon \quad \cdots(3.2.10)$$

③自由沈降速度式の補正　Stokes の終末沈降速度式に u_t'、μ_c、ρ_c の式を適用する。

$$u_t = \frac{g(\rho_p - \rho)D_p^2}{18\mu} \quad \text{(Stokes)} \qquad \cdots(3.2.11)$$

$$u_t' = \frac{g(\rho_p - \rho_{sl})D_p^2}{18\mu_{sl}} \qquad \cdots(3.2.12)$$

$$\frac{u_{ct}}{\varepsilon} = \frac{g[\rho_p - \{\rho_p(1-\varepsilon) + \rho\varepsilon\}]D_p^2}{18\mu f(\varepsilon)} \qquad \cdots(3.2.13)$$

$$\frac{u_{ct}}{\varepsilon} = \frac{g(\rho_p\varepsilon - \rho\varepsilon)D_p^2}{18\mu f(\varepsilon)} \qquad \cdots(3.2.14)$$

$$u_{ct} = \frac{g(\rho_p - \rho)D_p^2}{18\mu}\left[\frac{\varepsilon^2}{f(\varepsilon)}\right] \qquad \cdots(3.2.15)$$

$$\boxed{u_{ct} = \frac{u_t}{F(\varepsilon)}} \quad \left[F(\varepsilon) \equiv \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right] \qquad \cdots(3.2.16)$$

ただし、$F(\varepsilon)$は**空間率関数(voidage function)**であり、白井によって次式が報告されている。[文献 5]

(a)$0.3 \le \varepsilon \le 0.7$ のとき　$F(\varepsilon) = \dfrac{0.75 \times 10^{1.82(1-\varepsilon)}}{\varepsilon^2}$　$\cdots(3.2.17)$

(b)$0.3 \le \varepsilon \le 0.75$ のとき　$F(\varepsilon) = \dfrac{6(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3}$　$\cdots(3.2.18)$

(c)$0.55 \le \varepsilon \le 1$ のとき　$F(\varepsilon) = \varepsilon^{-4.65}$　$\cdots(3.2.19)$

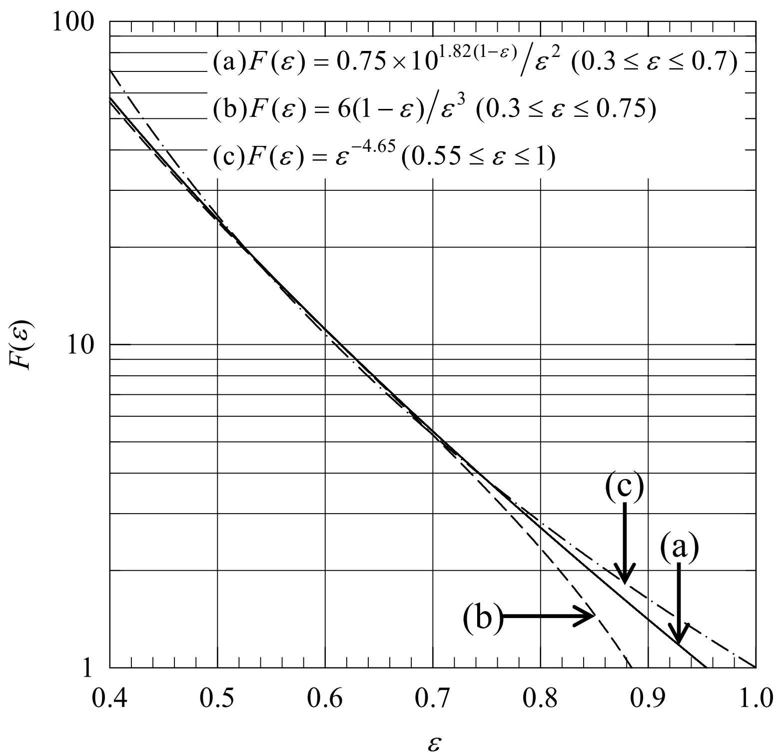


図 3.2.1　空間率関数と空隙率の関係[文献 5]

【計算例】干渉沈降速度

密度 2650 kg/m^3、平均粒子径 25.0 µm の粒子が 20.0 wt%含まれる泥水中での粒子の干渉沈降速度 u_{ct} [m/s] を求めよ。水の密度 1000 kg/m^3、水の粘度 1.00 mPa･s、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(3.70×10^{-4} m/s)

$u_t=g(\rho_p-\rho)D_p^2/18\mu=(9.81)(2650-1000)(25.0\times10^{-6})^2/[(18)(1.00\times10^{-3})]=5.6203\times10^{-4}$ m/s

$Re_p=D_pu_t\rho/\mu=(25.0\times10^{-6})(5.6203\times10^{-4})(1000)/(1.00\times10^{-3})=0.014050<2$ Stokes 域

$\varepsilon=(W/\rho)/[(W_p/\rho_p)+(W/\rho)]=[(0.80W_{sl})/\rho]/[(0.20W_{sl}/\rho_p)+(0.80W_{sl}/\rho)]=(0.80/1000)/[(0.20/2650)+(0.80/1000)]=0.91379$

$F(\varepsilon)=\varepsilon^{-4.65}=(0.91379)^{-4.65}=1.5207$

$u_{ct}=u_t/F(\varepsilon)=5.6203\times10^{-4}/1.5207=3.6958\times10^{-4}$ m/s ≒ $\boxed{3.70\times10^{-4}\ \mathrm{m/s}}$

【問題】干渉沈降速度

密度 2650 kg/m^3、平均粒子径 10.0 µm の粒子が 12.0 wt%含まれる泥水中での粒子の干渉沈降速度 u_{ct} [m/s] を求めよ。水の密度 1000 kg/m^3、水の粘度 1.00 mPa･s、重力加速度 9.81 m/s^2 とする。(7.12×10^{-5} m/s)

参考文献

[1] 三輪茂雄; 粉粒体工学, 朝倉書店(1972), p.293(抵抗係数とレイノルズ数の対応表が掲載されている。)
[2] 坂下 攝; 粉体プラントのスケール・アップ手法, 工業調査会(1992)
[3] 坂下 攝; 粉体プロセス設計－演習ノート－ 月刊「化学装置」別冊, 工業調査会(1999)
[4] 化学工学協会(編); 化学工学便覧 新版, 丸善 (1957)
[5] 白井 隆; 流動層(化学工学シリーズ 4), 科学技術社(1958), p.115